NOU

3000 DE PROBLEME PENTRU APROFUNDAREA ȘI CONSOLIDAREA CUNOȘTINȚELOR

CULEGERE DE PROBLEME DE MATEMATICĂ

pentru clasa a 6-a

Ioana Monalisa MANEA
Cristina NEAGOE

+400 DE PROBLEME PENTRU PREGĂTIREA EVALUĂRII NAȚIONALE

MANEA IOANA MONALISA
NEAGOE CRISTINA

CULEGERE DE PROBLEME

PENTRU CLASA A VI-a
EDIȚIA XVII
revizuită și adăugită în conformitate cu programa școlară pentru clasa a VI-a

EDITURA LOGOS JUNIOR
BUCUREȘTI

Senior redactor : Zamfirache Mihaela Merylu

Lucrarea este avizată cu numărul 74896 / 2002 în cadrul Comisiei Naționale de Matematică pentru a fi utilizată în clasă și la pregătirea suplimentară a elevilor

Referent științific : prof. Elena Matrosenco
Referent științific : prof. Marius Modoiu

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
MANEA, IOANA MONALISA
Culegere de probleme de matematică pentru clasa a VI-a /
Manea Ioana Monalisa, Neagoe Cristina - Ed. a 16-a, rev. -
București : Logos Junior, 2009
ISBN 978-973-7619-25-9
I. Neagoe, Cristina
51(075.33)

CUPRINS

ALGEBRA

Cap. I - MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE 3

Cap. II - NUMERE RAȚIONALE POZITIVE 9

Cap. III - RAPOARTE ȘI PROPORȚII 30

Cap. IV - NUMERE ÎNTREGI 45

GEOMETRIE

Cap. V - DREAPTA 60

Cap. VI - UNGHIUL 64

Cap. VII - CONGRUENȚA TRIUNGHIURILOR 73

Cap. VIII - PERPENDICULARITATE ÎN PLAN 78

Cap. IX - PARALELISM 83

Cap. X - PROPRIETĂȚILE TRIUNGHIULUI 86

Cap. XI - PROBLEME PENTRU PREGĂTIREA CONCURSURILOR ȘCOLARE 98

SOLUȚII 99

Toate drepturile asupra acestei ediții sunt rezervate editurii Logos Junior

Pentru informații și comenzi telefon 021.320.96.86.; 0722.438.539
Tiparul executat la S.C.OLIMP PRINTING SERVICES S.A.

ALGEBRA

Capitolul I

MULŢIMEA NUMERELOR NATURALE

**

1). Să se afle câtul şi restul împărţirii primului număr la cel de-al doilea în fiecare caz în parte şi apoi să se facă proba :

a). 126 şi 32 b). 1004 şi 17 c). 3251 şi 21 d). 46508 şi 102 e). 3050 şi 15

2). Calculaţi :

a). $(225 : 9 + 1024 : 16 - 2^3) : 9 =$ b). $(512 : 2^6 + 2^3) : 2^4 =$ c). $[(11^2 + 2^2) : 5 - 4^2] : 3 =$

d). $(196 : 14 + 19600) : 7 + 2^2 =$ e). $(432 : 24 - 4^2) \cdot 9 - 4^2 =$ f). $[(516 : 3 - 13^2) \cdot 2^4 - 6^2] : 2^2 =$

g). $(5016 : 6 - 3^6 + 1) : 3 - 6^2 =$

3). Să se calculeze :

a) $[15^2 - (2048 : 4 + 2^6) : 3] : 11 =$ b) $[(54 : 3^2 - 2^2) \cdot 26 - 5^2] : 3^2 =$

c) $\{[(13^2 + 3) : 2 - 5] : 9 + 4^2\} : (625 : 25) =$

4). Calculaţi :

a). $2^4 \cdot 2^5 =$ b). $3^8 \cdot 3^9 =$ c). $5^{10} \cdot 5^{21} =$ d). $2^6 \cdot 4^2 =$ e). $3^9 \cdot 9^7 =$ f). $8^{16} \cdot 16^5 =$

5). Efectuaţi :

a). $5^{17} : 5^9 =$ b). $3^{21} : 3^{18} =$ c). $2^{34} : 2^{30} =$ d). $4^{15} : 2^{26} =$ e). $25^8 : 125^5 =$ f). $16^9 : 8^{12} =$

6). Efectuaţi :

a). $(2^3)^8 =$ b). $(3^6)^9 =$ c). $(2 \cdot 3^2)^7 =$ d). $(5^3 \cdot 2^7)^5 =$ e). $2^8 \cdot 3^8 =$ f). $4^9 \cdot 3^{18} =$

7). Efectuaţi :

a). $(2^4 - 4^2)^{100} =$ b). $(5^7 : 25^2 - 11^2)^{10} : 8^6$

c). $(1^{100} - 100^0 + 3^{100}) : 9^{7^2} =$ d). $(16^4 \cdot 8^5 : 4^{15} + 2^0 + 2^2) \cdot 4 - 5^2 =$

e). $(1^0 + 1^1 + 1^2 + 1^3 + ... + 1^{102})^5 : 103^3 =$ f). $(3^{15} + 9^7) : 3^{14} =$

g). $(5^{12} + 25^6 + 125^4) : 5^{11} =$ h). $(2^{27} : 4^5 + 25^4 \cdot 2) : (4^7 + 5^8) =$

8). Aflaţi x număr natural :

a). $[(x : 7 + 107) : 2 \cdot 10 - 106] : 4 = 116$ b). $(x - 1475) : 25 \cdot 103 + 8008 : 143 - 71 = 10800$

c). $[(a + 1881 : 9) \cdot 81 + 18] \cdot 9 = 17631 \cdot 12$ d). $[(940 : x) \cdot 2 + (3700 - 1900) : 100] : 2 = 103$

e). $\overline{12x} + \overline{13x} + \overline{x37} + \overline{4x2} = 1249$ f). $128 \cdot 6 : (282 - x) = 192$

g). $(x : 4 \cdot 3 - 20) : 7 = 10$

Divizibilitatea

**

1). Care din numerele următoare se divid cu 3 şi care cu 9 : 126; 252; 720; 431; 117; 225; $3 \cdot 5^2$; $6 \cdot 27$

2). a). Toate numerele care se divid cu 3 se divid şi cu 9 ?

b). Daţi exemple de numere pare divizibile cu 3 şi care nu se divid cu 9.

c). Daţi exemple de numere pare divizibile cu 9.

d). Găsiţi numere impare divizibile cu 3 şi să nu se dividă cu 9.

3). Să se scrie toate numerele naturale de forma :

a). $\overline{21x} \vdots 2$ b). $\overline{4y3} \vdots 3$ c). $\overline{34xy} \vdots 30$ d). $\overline{72y} \vdots 5$ e). $\overline{435y} \vdots 6$ f). $\overline{2x3x} \vdots 6$

g). $\overline{x3y}\,\vdots\,15$ h). $\overline{42x3y}\,\vdots\,15$ i). $15\,|\,\overline{5x3y}$ j). $\overline{42xy}\,\vdots\,15$ şi $\overline{42xy}$ nu se divide cu 2

4). Să se precizeze care din următoarele numere sunt prime şi pentru cele compuse să se găsească divizorii proprii şi cei improprii : a).59; b).95; c).123; d).115; e).1243; f).1921; g).1309

5). Formaţi perechi de numere compuse, dar prime între ele, numai cu cifrele 3, 2, 1.

6). Să se scrie toate perechile de numere prime între ele care se pot forma cu numerele :
a). 12, 36, 81, 250, 121, 9 b). 14, 49, 27, 32

7). Aflaţi cifra x astfel încât perechile următoare să fie numere prime între ele :
a). 24 şi $\overline{2x}$; b). $\overline{1x}$ şi 18; c). 30 şi $\overline{4x}$; d). $\overline{4x}$ şi $\overline{x4}$;
e). $\overline{2x}$ şi $\overline{x6}$; f). $\overline{12x}$ şi 24; g). 1125 şi $\overline{401x}$

8). Să se afle elementele mulţimii : $A = \{x \in N^* \mid (x, 15) = 1, x < 7\}$.

9). a). Pot fi două numere prime între ele dacă primul este multiplu de 6 şi al doilea este multiplu de 9 ? Justificaţi.
b). Există a număr natural, multiplu de 4 astfel încât (12, a) = 1 ? De ce ?

10). Să se găsească toate numerele de forma : (x, y, z cifre)
a). $\overline{435y}$ divizibile cu 6 b). $\overline{12xy}$ divizibile cu 18 c). $\overline{6x5y}$ divizibile cu 45
d). $\overline{68x}$ divizibile cu 12 e). $\overline{4x1y}$ divizibile cu 12 f). $\overline{x3y}$ divizibile cu 15
g). $\overline{24x0}$ divizibile cu 20 h). $\overline{x42y}$ divizibile cu 36 i). $\overline{x2y}$ divizibile cu 75
j). $\overline{87xz}$ divizibile cu 50

11). a). Ştiind că 3 | 12 şi 12 | 36, ce relaţie există între 3 şi 36 ?
b). Dacă ştim n | a şi n | ab, este necesar ca n | b ?
c). Este adevărat că dacă n | (a – b) atunci n | a şi n | b ?
d). Dacă un număr natural divide suma a două numere naturale atunci el divide pe fiecare termen al sumei.
Indicaţie : pentru c şi d căutaţi exemple şi contraexemple.

12). Fără a efectua calculele, hotărâţi care propoziţii sunt adevărate şi care nu : a). „5 | 20 · 31"
exemplu : adevărat pentru că 5 | 20 => 5 divide orice multiplu a lui 20 => 5 | 20 · 31
b). „6 | 24 · 58" c). „2 | 8 · 9" d). „2 | 9 · 7"
e). „3 | 12 · 17 · 10" f). „3 | 54 · 7" g). „2 | (400 + 36)"
h). „3 | (400 + 36)" i). „5 | (400 + 36)" j). „2 | (600 + 303)"
k). 3 | (600 + 303 + 24)" l). „2 | (17 + 4 + 36)" m). „2 | (29 · 10 + 42)"
n). „5 | (14 · 15 + 20)" o). „3 | (12 · 25 + 4)" p). „2 | (300 · 12 – 630)"
r). „3 | (300 · 4 + 15 – 22)" s). „10 | (540 + 30 · 43)"

13). Aflaţi 2 numere prime între ele care au produsul egal cu : a). 48; b). 70; c). 102.

14). Să se determine elementele mulţimilor : $A = \{x \mid x \in N, \overline{2x3}\,\vdots\,3\}$ $B = \{y \mid y \in N^*, \overline{2y4y}\,\vdots\,6\}$

15). Media aritmetică a trei numere este 17, iar unul dintre numere este număr prim cuprins între 20 şi 28. Să se afle media aritmetică a celorlalte 2 numere.

16). Să se arate că următoarele fracţii sunt ireductibile oricare ar fi n ∈ N :

a). $\frac{3n+1}{3n+2}$; b). $\frac{2n}{2n+1}$; c). $\frac{4n+3}{4n+2}$; d). $\frac{4n+3}{2n+1}$; e). $\frac{3n}{6n+1}$; f). $\frac{8n+7}{4n+3}$; g). $\frac{4n+3}{5n+4}$; h). $\frac{2n+1}{5n+3}$

Indicaţie : dacă $\frac{3n+1}{3n+2}$ nu este ireductibilă => se poate simplifica cu un număr natural. Să notăm cu a acel număr natural => a | (3n + 1) şi a | (3n + 2). Conform proprietăţilor divizibilităţii => a | [(3n + 2) – (3n + 1)] => a | 1 =>

a = 1. Dar o fracţie care se simplifică numai cu 1 este ireductibilă.

17). Să se determine toate numerele de forma :

a). $\overline{42x3y} \vdots 15$ b). $18 | \overline{x5y}$ c). $\overline{2xy} \vdots 45$ d). $\overline{xxy} \vdots 12$ e). $15 | \overline{5x3y}$ f). $12 | \overline{5x3y}$

Descompunerea în factori. C.m.m.d.c. şi c.m.m.m.c.

*

1). a). Descompuneţi în factori : a). 105; b). 144; c). 117; d). 625.

b). Dacă ştim $25 = 5^2$, ştiţi fără să efectuaţi calculele, să descompuneţi 250 ? 2500 ? 25000 ?

c). $72 = 2^3 \cdot 3^2$. Descompuneţi fără să efectuaţi calculele 720, 7200, 72000.

2). Ştiind că : dacă unul dintre numere este divizor pentru celelalte el este c.m.m.d.c. pentru toate, să se calculeze : a). (6, 18, 12)

Exemplu : 6 | 18, 6 | 12 => 6 este c.m.m.d.c. pentru 6, 18, 12

b). (8, 4, 12); c). (36, 24, 12); d). (45, 72, 9); e). (30, 36, 6); f). (5, 10, 15); g). (120, 5, 40)

atenţie : vrem (12, 20, 4, 18), 4 | 12, 4 | 20, dar $4 \nmid 18$ => 4 nu este c.m.m.d.c. pentru 12, 20, 4, 18

h). (120, 108, 6, 28) i). (72, 84, 12, 54)

3). Ştiind că dacă unul dintre numere este multiplu pentru celelalte numere el este c.m.m.m.c. pentru toate să se calculeze : a). [120, 40, 5]

Exemplu : 120 $\vdots$ 40, 120 $\vdots$ 5 => 120 este c.m.m.m.c. pentru 120, 40, 5

b). [45, 9, 5, 15] c). [8, 12, 3, 24] d). [9, 2, 3, 4, 36] e). [48, 2, 6, 16]

f). [21, 14, 42] g). [18, 24, 72] h). [3, 4, 6, 27, 36, 108]

atenţie : vrem [5, 10, 8, 4, 20] dar observăm că : 20 $\vdots$ 5, 20 $\vdots$ 10, 20 $\vdots$ 4 dar 20 $\not\vdots$ 8 => 20 nu este c.m.m.m.c. pentru 5, 10, 8, 4, şi 20 => [5, 8, 10, 4, 20] = 40

i). [12, 18, 24, 36] j). [12, 18, 24, 48] k). [15, 20, 25, 60]

4). Ştiind că : dacă numerele sunt prime între ele => c.m.m.d.c. = 1, c.m.m.m.c. = produsul lor, calculaţi :

a). (2, 9); b). [2, 9]; c). [18, 25]; d). (18, 25); e). (2, 3, 5); f). [2, 3, 5]; g). [9, 4, 5] h). (9, 4, 5)

5). Calculaţi c.m.m.d.c. :

a). $A = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^7 \cdot 11^4$ şi $B = 2 \cdot 5^2 \cdot 7^8 \cdot 11$ b). 90 şi 168 c). 100, 280 şi 980

d). 875 şi 550 e). 16, 48, 64 şi 72 f). 50, 75 şi 120 g). 112, 28 şi 98

h). 144 şi 192 i). 3024, 1350 şi 360 j). 392, 252 şi 560 k). 1944, 729 şi 2835

l). 594, 4851 şi 7260

6). Calculaţi c.m.m.m.c. pentru :

a). $A = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$ şi $B = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$ b). $A = 3^2 \cdot 7 \cdot 11$ şi $B = 2 \cdot 3 \cdot 11$

c). 6, 12 şi 18 d). 24, 36 şi 18 e). 36, 9, 6 şi 54 f). 14, 5 şi 35

g). 45, 75 şi 27 h). 8, 14 şi 28 i). 20, 15 şi 12 j). 140 şi 60

k). 220, 3025 şi 150 l). 288, 648 şi 1080 m). 784, 504 şi 980

7). Să se afle c.m.m.d.c. şi c.m.m.m.c. pentru numerele : a). 180, 847, 231; b). 3600, 4500, 320, 240

8). Să se calculeze c.m.m.m.c. şi c.m.m.d.c. pentru :

a) 120; 100 si 280; b) 42; 105 si 147; c) 196; 1620 si 1008; d) 22; 75 si 150.

**

9). Se dau numerele : $A = [2^2 \cdot 2^3 - 2^2 \cdot (5-4)] : 2^2 + (2^3 + 2)^2 : 5$ şi $B = 6 + 2 \cdot [(2 + 2^2 \cdot 3) - 1]$. Calculaţi [A, B] şi (A, B).

10). Calculați : a). $(12, 28, 26) \cdot [18, 24] =$;
b). $(A, B) \cdot [4, 6] =$ unde : $A = (60, 200)$ și $B = [32, 80]$.
11). Aflați c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. pentru cel mai mare număr natural care împărțit la 7 dă câtul 6 și cel mai mic număr natural care împărțit la 9 dă câtul 4.
12). Aflați c.m.m.d.c. pentru cel mai mare număr de forma $\overline{1ab} \vdots 12$ și cel mai mic număr de forma $\overline{a0b} \vdots 18$.
13). Se dau numerele : $A = [(2^5 \cdot 3^5 : 36 - 2^6 : 2^3) - 5^2] : 3$ și $B = (12 - 3 \cdot 2^0) \cdot 10$
Să se afle (A, B) și [A, B].
14). Să se găsească cel mai mic număr natural care împărțit la 5 și la 7 dă restul 1 de fiecare dată și câturi nenule.
15). Să se afle numărul natural mai mic ca 400 care împărțit la 18, la 72 și la 60 se obține restul 15 de fiecare dată și câturi nenule.
16). Să se determine toate numerele mai mici ca 300 care împărțite la 5, la 6, și la 8 dau restul 3 la fiecare împărțire și câturi nenule.
17). Să se determine toate numerele mai mici ca 1000 care împărțite la 24, la 18 și la 20 dau de fiecare dată rest 9 și câturi nenule.
18). Să se găsească cel mai mare număr natural astfel încât 245 și 296 împărțite la acest număr natural dau resturile 5 respectiv 8.
19). Știind că numerele 1092, 1792 și 1619 împărțite prin același număr natural dau resturile 12, 28 și respectiv 35, să se afle numărul prin care se împart.
20). Să se afle toate numerele naturale x astfel încât 297 și 319 împărțite la același număr x să dea resturile 9 respectiv 7.
21). Numerele 127, 514 și 1584 împărțite la același număr natural dau resturile 7, 10 și 0. Să se afle împărțitorul. Găsiți toate soluțiile.
22). Știind că 1372, 1316 și 1575 împărțite la același număr natural dau resturile 8, 14 și 25 să se afle împărțitorul. Găsiți toate soluțiile.
23). Doi copii plantează puieți pe cele două laturi ale unei alei. Unul îi plantează din 3 în 3 m, celălalt din 5 în 5 m. Știind că au început din același loc, peste câți metri vor fi amândoi în același loc pentru prima dată și de câte ori se vor mai întâlni în 100 m ?
24). La serbarea de sfârșit de an s-au dat pachetele conținând dulciuri. Fiecare pachet are același număr de ciocolate, bomboane și napolitane. Câte pachete s-au dat dacă din 282 ciocolate rămân 2, din 715 bomboane rămân 15 și din 424 napolitane rămân 4 ? (Aflați numărul maxim de pachete.)
25). Care este numărul de elevi dintr-o clasă știind că pot fi împărțiți exact în grupe de câte 2, 3 sau 5 elevi ?
26). a). Care este cel mai mare număr natural de 3 cifre divizibil cu 18 ?
b). Dar cel mai mic număr natural de 4 cifre divizibil cu 75 ?
c). Care este cel mai mic număr natural de 3 cifre divizibil cu 12 ?
d). Care este cel mai mare număr natural de 3 cifre divizibil cu 15 ?
27). Un muncitor grupând piesele executate câte 2, câte 3, câte 4 și câte 5 îi rămân de fiecare dată una rest. Câte piese a executat muncitorul știind că norma sa este sub 64 de piese?
28). a). Dacă produsul a două numere naturale este 345, care sunt numerele ? Câte soluții are problema ?
b). Aflați două numere naturale prime între ele dacă produsul lor este 56.
c). Aflați două numere naturale dacă produsul lor este 48 și c.m.m.d.c. este 4.

29). Ştiind că un număr natural se împarte la 3, 8, 11 şi dă resturile 2, 7 şi 10 să se afle numărul dacă e mai mic decât 300.
30). Să se afle cel mai mic număr natural care se împarte la 8, 5 şi 3 şi dă respectiv resturile 6, 3 şi 1.
31). Să se afle două numere naturale ştiind că suma lor este 168 şi c.m.m.d.c. al lor este 24.
32). a). Să se afle două numere naturale dacă produsul este 48 şi c.m.m.d.c. lor este 2.
b). Să se afle trei numere naturale care au produsul 96 şi c.m.m.d.c. lor este 2.
33). Aflaţi a şi b numere naturale dacă se cunosc :
a). $(a; b) = 8$ şi $[a; b] = 96$ b). $(a; b) = 7$ şi $[a; b] = 210$
34). Produsul a două numere naturale este 450 iar c.m.m.m.c. este 90. Să se afle numerele.
35). Produsul a două numere naturale este 576 şi c.m.m.d.c. este 12. Să se afle numerele.
36). Media aritmetică a două numere este 24, iar cel mai mare divizor comun al lor este 4. Să se afle numerele.
37). Să se afle numărul de elevi dintr-o clasă dacă aşezaţi câte 4 sau câte 6 în bancă se formează grupe complete şi puşi câte 5 în bancă rămân 4 elevi.
38). O persoană a cumpărat 2 cutii de bomboane cu 25 respectiv 34 bomboane. Să se afle câţi copii are persoana dacă împărţind cele 2 cutii pe rând, în mod egal copiilor, rămâne de fiecare dată o bomboană.
39). Aflaţi numerele naturale mai mici ca 100 dacă împărţite la 5, 6, 10 dau mereu restul 2.
40). Numerele 1812, 355 şi 2541 împărţite la acelaşi număr natural dau resturile 12, 19 respectiv 21.

* * *

41). Aflaţi a, b, c prime dacă $3a + 2b + 4c = 18$.
42). a). Să se afle cele mai mici numere naturale prime care îndeplinesc condiţia : $a + 3b + 9c = 111$
b). La fel pentru $a + 5b + 35c = 145$ c). La fel pentru $a + 5b + 10c = 145$
43). Să se arate că :
a) $(2^n + 2^{n+1})$ se divide cu 3, pentru orice $n \in N$
b) $(2 \cdot 3^n + 3^{n+1} + 2 \cdot 3^{n+2})$ se divide cu 23, pentru orice $n \in N$
c) $(4^n + 2^{2n+2} + 4^{n+1})$ se divide cu 3, pentru orice $n \in N$
d) $(5^n + 3 \cdot 5^{n+2} - 2 \cdot 5^{n+1})$ se divide cu 11, pentru orice $n \in N$
e) $(2^{2n+1} + 3 \cdot 4^n)$ se divide cu 10, pentru orice $n \in N^*$
f) $(2^{n+1} \cdot 5^n + 2^n \cdot 5^{n+2})$ se divide cu 90, pentru orice $n \in N^*$
g) $(2^{3n+1} \cdot 3^{n+1} + 8^n \cdot 3^{n+3} + 4^n \cdot 6^{n+1})$ se divide cu 13, pentru orice $n \in N$
h) $(2^n \cdot 15^{n+1} + 6^n \cdot 5^{n+2} - 10^n \cdot 3^{n+2})$ se divide cu 31, pentru orice $n \in N$
44). Să se arate că :
a) $\overline{aba}$ se divide cu 11 ştiind că $b = 2a$ b) $\overline{abc} - \overline{cba}$ se divide cu 11
c) $\overline{abc} + \overline{bca}$ se divide cu 112, ştiind că $a = 10b + c$ d) $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ se divide cu 111
45). Să se afle x cifră astfel încât numerele naturale de forma $\overline{4x}$ şi c.m.m.d.c. numerelor 132 şi 378 să fie prime între ele.
46). Aflaţi cifra x dacă :
a). $(\overline{23x}; 4) = 2$ b). $(\overline{15x}; 25) = 5$ c). $(\overline{38x}; 4) = 1$ d). $(\overline{1x21}; 9) = 1$ e). $(\overline{24x}; 24) = 1$
47). Arătaţi că pentru $a = 7n + 3$ şi $b = 5n + 2$ avem $[a; b] = a \cdot b$, oricare ar fi $n \in N$.
48). Demonstraţi că : a). $(4n + 6; 6n + 8) \neq 1$ b). $(4n + 3; 3n + 1) \neq 1$.
49). Aflaţi cantitatea minimă de bomboane care se pot împărţi în cutii de câte 30 bomboane,

rămânând 13 bomboane iar dacă se împarte în cutii de câte 24 bomboane, mai rămân 7 bomboane.

50). Aflaţi numărul de garoafe dintr-o florărie ştiind că este cuprins între 600 şi 650 şi dacă faci buchete de câte 5 flori sau de câte 7 flori rămân de fiecare dată 4 flori.

51). Pe o stradă se află stâlpi de iluminat din 20 m în 20 m şi stâlpi pentru susţinerea firelor de troleibuz din 15 m în 15 m. Dacă strada are lungimea de 1,1 km şi primii stâlpi sunt în acelaşi punct, de câte ori mai coincid stâlpii ?

Testul 1

⑤1p **1).** Dacă $\overline{4x7} \vdots 3 \Rightarrow x \in$.......

⑤1p **2).** $D_6 \cap M_2 =$.......

⑤1p **3).** Cel mai mic număr natural care se împarte exact la 15; 20 şi 18 este ....

⑤1p **4).** Aflaţi c.m.m.d.c. al numerelor 72; 48 şi 56.

⑦1p **5).** Cel mai mic număr de forma $\overline{57xy}$ care se divide cu 15 este ....

⑦1p **6).** $[180; 144] - (2100; 1400) =$.......

⑩1p **7).** Să se afle perechile de numere prime între ele care au c.m.m.m.c. al lor 36.

⑨2p **8).** Dacă $a + 3b = 9$ unde a este număr prim atunci b = ...

Testul 2

⑤1p **1).** Să se scrie o pereche de numere prime între ele.

⑤1p **2).** Dacă $3 \mid \overline{2x3x}$, atunci x = ...

⑤1p **3).** C.m.m.d.c. al numerelor 132; 363 şi 726 este ....

⑤1p **4).** C.m.m.m.c. al numerelor 120; 300 şi 350 este ....

⑨1p **5).** Să se stabilească dacă numărul a este număr prim :

$a = 408 : [2 \cdot 3^2 + (2^5)^2 : 8^6 + 1^3 + 27^{13} : 3^{39}]$

⑦2p **6).** Să se afle mulţimile : a). $D_{30} - D_{18}$; b). $D_{40} \cap D_{60}$.

⑨1p 7). Fiind dat numărul $a = 5 \cdot (3x + 1) - 8x$, să se precizeze pentru care număr x prim, a este număr impar.

⑩1p **8).** Să se arate că $3^{n+1} - 3^n + 3^{n+2}$ este multiplu de 11, oricare ar fi $n \in N$.

Capitolul II
NUMERE RAŢIONALE POZITIVE
Fracţii ireductibile, noţiunea de număr raţional

1). Reprezentaţi pe axa numerelor :

a). $\frac{22}{4};\frac{26}{6};\frac{27}{8};\frac{24}{4};\frac{12}{2};\frac{11}{2};\frac{13}{3}$ b). $\frac{4}{1};\frac{36}{9};\frac{38}{8};\frac{32}{24};\frac{76}{16};\frac{20}{15};\frac{19}{4}$ c). $\frac{60}{25};\frac{15}{20};\frac{27}{9};\frac{1}{1};\frac{3}{4};\frac{12}{5};\frac{6}{8};\frac{3}{1}$

2). Fie mulţimea $A=\left\{\frac{12}{2};-8;\frac{15}{4};3;\frac{21}{3};0;-5;\frac{51}{3}\right\}$. Să se afle : a). $A\cap N$; b). $A\cap Z$; c). $A\cap Q$; d). $A\cap(Z-N)$; e). $A\cap(Q-Z)$.

3). Fie mulţimea $B=\left\{2{,}3;\frac{5}{6};7;0;1{,}(3);-0{,}2(5)\right\}$. Aflaţi : a). $B\cap N$; b). $B\cap Q$; c). $B\cap(Q-N)$.

4). Transformaţi în fracţii ordinare :

a). 2,3 b). 0,15 c). 3,107 d). 0,(3) e). 0,(31) f). 1,(13)
g). 2,(107) h). 0,2(3) i). 0,12(3) j). 0,01(72) k). 1,2(108) l). 2,73(5)

5). Transformaţi în fracţii zecimale sau periodice :

a). $\frac{2}{3}$ b). $\frac{5}{6}$ c). $\frac{4}{5}$ d). $3\frac{1}{2}$ e). $4\frac{2}{5}$ f). $\frac{6}{7}$ g). $3\frac{1}{11}$ h). $2\frac{3}{13}$ i). $\frac{17}{20}$

6). Care dintre următoarele fracţii sunt ireductibile :

a). $\frac{6}{8}$ b). $\frac{34}{51}$ c). $\frac{26}{65}$ d). $\frac{57}{27}$ e). $\frac{35}{60}$ f). $\frac{23}{50}$ g). $\frac{84}{91}$ h). $\frac{70}{9}$ i). $\frac{121}{33}$

7). Găsiţi fracţii echivalente cu : a). $\frac{3}{4}$; b). $\frac{2}{3}$; c). $\frac{5}{6}$; d). $\frac{1}{2}$; e). $\frac{7}{3}$

8). Aflaţi $x\in N$: a). $\frac{7}{x}\in N$; b). $\frac{9}{x+1}\in N$; c). $\frac{5}{2x+1}\in N$; d). $\frac{x+7}{x-1}\in N$

9). Determinaţi elementele mulţimii : $A=\left\{x\in N \,\middle|\, \frac{1}{2}<x<\frac{18}{5}\right\}$.

Aducerea fracţiilor la acelaşi numitor

*

1). Să se aducă următoarele fracţii la acelaşi numitor :

a). $\frac{2}{3};\frac{5}{6};\frac{7}{2}$; b). $\frac{5}{2};\frac{1}{5};\frac{7}{10}$; c). $\frac{1}{4};\frac{3}{2};\frac{1}{3}$; d). $\frac{7}{12};\frac{2}{3};\frac{3}{2};\frac{5}{6}$; e). $\frac{2}{7};\frac{3}{14};\frac{1}{4}$; f). $\frac{2}{6};\frac{5}{4};\frac{1}{8}$;

g). $\frac{3}{4};\frac{1}{2};\frac{7}{10}$; h). $\frac{3}{28};\frac{5}{7};\frac{11}{14}$; i). $\frac{3}{7};\frac{1}{3};\frac{5}{21}$; j). $\frac{1}{5};\frac{2}{3};\frac{4}{15}$; k). $\frac{1}{3};\frac{3}{8};\frac{5}{6}$; l). $\frac{5}{6};\frac{7}{10};\frac{1}{2};\frac{4}{3}$;

m). $\frac{4}{5};\frac{1}{35};\frac{2}{7}$; n). $\frac{1}{12};\frac{7}{24};\frac{1}{8}$; o). $\frac{1}{9};\frac{2}{3};\frac{1}{2};\frac{5}{4};\frac{11}{6}$; p). $\frac{2}{11};\frac{1}{2};\frac{3}{22}$; r). $\frac{1}{8};\frac{3}{14};\frac{5}{28};\frac{1}{7}$;

s). $\frac{1}{8};\frac{5}{16};\frac{1}{3}$; t). $\frac{28}{21};\frac{6}{12};\frac{24}{32}$; u). $\frac{15}{18};\frac{6}{12};\frac{27}{36}$; v). $\frac{6}{30};\frac{21}{14};\frac{5}{20}$.

2). Să se aducă următoarele fracţii la acelaşi numitor :

a). $\frac{3}{10};\frac{2}{5};\frac{5}{2}$; b). $\frac{1}{24};\frac{2}{3};\frac{5}{8};\frac{7}{12}$; c). $\frac{7}{6};\frac{5}{9};\frac{11}{3};\frac{5}{2}$;

d). $\frac{13}{15};\frac{7}{30};\frac{16}{10};\frac{1}{2}$; e). $\frac{9}{48};\frac{12}{16};\frac{5}{8};\frac{1}{6};\frac{3}{2};\frac{10}{12}$; f). $\frac{7}{9};\frac{11}{36};\frac{5}{12};\frac{9}{4};\frac{13}{18}$.

**

3). Să se aducă următoarele fracţii la acelaşi numitor :

a). $\frac{7}{16};\frac{2}{3}$ şi $\frac{5}{6}$; b). $\frac{7}{10};\frac{3}{4}$ şi $\frac{2}{25}$; c). $\frac{3}{98};\frac{1}{49}$ şi $\frac{7}{4}$; d). $\frac{2}{63};\frac{4}{49}$ şi $\frac{4}{9}$;

e). $\frac{1}{2};\frac{3}{4};\frac{5}{6}$ şi $\frac{2}{3}$; f). $\frac{3}{4};\frac{1}{3};\frac{7}{6}$ şi $\frac{5}{2}$; g). $\frac{3}{8};\frac{1}{16};\frac{5}{18}$; h). $\frac{1}{12};\frac{7}{6};\frac{3}{9};\frac{5}{4}$;

i). $\frac{13}{24};\frac{7}{40};\frac{2}{15};\frac{9}{30}$; j). $\frac{2}{33};\frac{12}{55};\frac{4}{15};\frac{5}{11}$; k). $\frac{2}{7};\frac{1}{28};\frac{3}{14};\frac{8}{21}$; l). $\frac{9}{10};\frac{7}{20};\frac{12}{25};\frac{41}{50};\frac{13}{100}$;

m). $\frac{13}{36};\frac{11}{24};\frac{7}{18};\frac{5}{6}$ n). $\frac{3}{10};\frac{1}{5};\frac{5}{2}$ o). $\frac{5}{6};\frac{1}{5};\frac{7}{30}$ p). $\frac{5}{6};\frac{2}{3};\frac{7}{9}$ r). $\frac{3}{4};\frac{1}{2};\frac{4}{7}$.

4). Să se scrie în ordine crescătoare :

a). $\frac{5}{4};\frac{2}{3};\frac{1}{6}$; b). $\frac{2}{9};\frac{5}{6};\frac{3}{2};\frac{4}{3}$; c). $1;\frac{15}{14};\frac{3}{7};\frac{5}{2}$;

d). $\frac{9}{4};\frac{7}{6};\frac{5}{2};\frac{10}{3}$; e). $\frac{11}{200};\frac{13}{300};\frac{17}{600};\frac{8}{150}$; f). $\frac{2}{33};\frac{13}{55};\frac{29}{165}$.

Introducerea şi scoaterea întregilor

*

1). Să se introducă întregii în fracţie :

a). $3\frac{1}{2}$; b). $2\frac{1}{2}$; c). $4\frac{1}{3}$; d). $5\frac{2}{3}$; e). $3\frac{4}{5}$

2). Să se scoată întregii din fracţie :

a). $\frac{10}{7}$; b). $\frac{3}{2}$; c). $\frac{12}{5}$; d). $\frac{18}{7}$; e). $\frac{25}{3}$; f). $\frac{28}{3}$; g). $\frac{104}{30}$

**

3). Să se efectueze şi să se scoată întregii din rezultat, atunci când se poate :

a). $5\frac{7}{8}+\frac{17}{48}+1\frac{1}{3}=$ R : $7\frac{9}{16}$ b). $1\frac{1}{15}+\frac{4}{5}+2=$ R : $3\frac{13}{15}$

c). $3\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+1\frac{1}{8}=$ R : $5\frac{17}{24}$ d). $4\frac{5}{6}+1+2\frac{1}{2}+3\frac{2}{3}=$ R : 12

Ordonarea numerelor raționale

*

1). Să se așeze semnele „<" și „>" corect :

a). $\frac{3}{4}$ și $\frac{5}{4}$; b). $\frac{3}{8}$ și $\frac{5}{8}$; c). $\frac{4}{3}$ și $\frac{4}{5}$; d). $\frac{7}{2}$ și $\frac{7}{3}$; e). $\frac{3}{4}$ și $\frac{1}{2}$; f). $\frac{4}{3}$ și $\frac{6}{5}$;

g). $2\frac{1}{3}$ și $2\frac{1}{5}$; h). $3\frac{4}{9}$ și $3\frac{5}{10}$; i). $5\frac{9}{12}$ și $5\frac{6}{8}$; j). $6\frac{1}{2}$ și $5\frac{3}{4}$; k). $\frac{13}{3}$ și $\frac{27}{4}$

**

2). Să se scrie valoarea logică a fiecărei propoziții :

a). $\frac{1}{2}<\frac{3}{6}$; b). $\frac{2}{5}>\frac{1}{6}$; c). $\frac{7}{12}<\frac{2}{3}$; d). $\frac{81}{144}=\frac{27}{48}$; e). $\frac{11}{169}<\frac{9}{26}$;

f). $\frac{17}{12}>\frac{1}{18}$; g). $\frac{6}{7}<\frac{13}{14}<\frac{85}{12}$; h). $\frac{9}{14}<\frac{7}{12}<\frac{13}{28}$; i). $\frac{2}{49}<\frac{1}{21}<\frac{3}{35}<\frac{4}{15}$

3). Să se așeze în ordine crescătoare numerele raționale :

a). $\frac{1}{6};\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{8};\frac{1}{4}$ b). $\frac{3}{5};\frac{1}{5};\frac{7}{5};\frac{41}{5};\frac{12}{5};2;3\frac{1}{5}$ c). $\frac{2}{3};\frac{4}{5};\frac{7}{15}$

d). $\frac{3}{8};\frac{1}{4};\frac{5}{16};\frac{7}{2};1$ e). $\frac{6}{5};1;\frac{1}{10};\frac{4}{15};\frac{7}{10};1\frac{1}{10}$

4). Să se determine $x \in N$ în fiecare caz în parte :

a). $\frac{x}{2}<\frac{7}{2}$; b). $\frac{7}{5}\geq\frac{x}{5}$; c). $\frac{12}{x}\geq\frac{12}{5}$; d). $\frac{13}{7}<\frac{13}{x}$; e). $\frac{x}{6}<\frac{5}{6}$; f). $\frac{x+2}{7}\leq\frac{5}{7}$; g). $\frac{x+5}{3}\leq\frac{7}{3}$;

h). $\frac{3x}{7}\leq\frac{9}{7}$; i). $\frac{8}{3x}\geq\frac{8}{6}$; j). $\frac{x}{4}<\frac{5}{2}$; k). $\frac{x}{3}\leq\frac{7}{6}$; l). $\frac{2}{3}\geq\frac{x}{9}$; m). $\frac{7}{4}>\frac{x}{2}$; n). $\frac{x}{3}<\frac{7}{2}$

5). Ordonați crescător : $\frac{x}{x+1};\ \frac{x+3}{x+2};\ \frac{x-4}{x}$, $x \in N^*$.

6). Aflați $x \in N$ dacă se știe :

a). $\frac{1}{2}<\frac{x}{3}<\frac{4}{3}$ b). $\frac{5}{2}<\frac{x}{3}<\frac{17}{5}$ c). $\frac{2}{3}<\frac{x+1}{2}<\frac{6}{5}$ d). $\frac{1}{3}<\frac{2x+1}{2}<\frac{13}{4}$

e). $\frac{6}{5}<\frac{3}{x}<2$ f). $\frac{3}{7}<\frac{4}{x-2}<\frac{5}{2}$ g). $\frac{6}{5}<\frac{2}{2x+1}<\frac{12}{5}$

7). Ordonați descrescător : $\frac{1}{x}+1;\ 1+\frac{1}{2x};\ \frac{x}{x}+\frac{1}{x+1}$; $x \in N^*$.

Adunarea și scăderea în Q

*

1). Dovedește că ai înțeles lecția și calculează :

a). $5\frac{1}{3}-2=$ R : $3\frac{1}{3}$ b). $4\frac{1}{3}-3=$ R : $1\frac{1}{3}$ c). $6\frac{2}{3}-4\frac{1}{3}=$ R : $2\frac{1}{3}$

d). $5\frac{2}{7}-1\frac{1}{7}=$ R : $4\frac{1}{7}$ e). $6\frac{3}{4}-5\frac{1}{2}=$ R : $1\frac{1}{4}$ f). $4-3\frac{1}{2}=$ R : $\frac{1}{2}$

g). $7\frac{1}{2}-5\frac{3}{4}=$ R : $1\frac{3}{4}$ h). $3\frac{1}{6}-2-\frac{5}{6}=$ R : $\frac{1}{3}$ i). $2\frac{2}{3}+\frac{4}{9}-3=$ R : $\frac{1}{9}$

j). $5\frac{4}{5}+\frac{1}{2}-6=$ R : $\frac{3}{10}$ k). $4\frac{5}{18}+3-6\frac{1}{2}=$ R : $\frac{7}{9}$ l). $\frac{1}{3}+2\frac{1}{2}-1=$ R : $1\frac{5}{6}$

m). $\frac{15}{8}-1=$ R : $\frac{7}{8}$ n). $\frac{1}{3}+1\frac{1}{2}-1\frac{1}{4}=$ R : $\frac{7}{12}$ o). $\frac{16}{5}-2=$ R : $1\frac{1}{5}$

p). $\frac{22}{4}-4=$ R : $1\frac{1}{2}$ r). $\frac{42}{5}-7\frac{1}{2}=$ R : $\frac{9}{10}$ s). $\frac{63}{8}-2-4\frac{1}{2}=$ R : $1\frac{3}{8}$

t). $5\frac{7}{8}-2\frac{3}{16}-\frac{4}{3}+\frac{1}{4}=$ R : $2\frac{29}{48}$ u). $3\frac{5}{6}-\frac{3}{5}+1\frac{1}{2}-\frac{7}{3}=$ R : $2\frac{2}{5}$

2). Poţi să le rezolvi în 15 minute ? Încearcă :

a) $\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{5}{12}=$ b) $2\frac{1}{5}+\frac{7}{10}+1\frac{1}{2}=$ c) $2+1\frac{1}{3}+\frac{5}{6}+\frac{1}{4}=$

d) $1\frac{1}{12}+\frac{5}{30}+2\frac{1}{4}=$ e) $\frac{7}{140}+\frac{2}{5}+\frac{5}{60}=$ f) $1\frac{4}{72}+2\frac{1}{6}+3\frac{1}{3}+1=$

g) $2-\frac{3}{2}=$ h) $1+\frac{5}{6}-1\frac{2}{3}=$ i) $6\frac{1}{4}-\frac{3}{8}+\frac{1}{12}=$

j) $3\frac{1}{12}-\frac{3}{4}-\frac{7}{18}=$ k) $5\frac{1}{14}-2\frac{4}{21}-1\frac{3}{28}=$

**

3). Să se efectueze (simplificaţi înainte să aduceţi la acelaşi numitor) :

a). $7-2\frac{1}{3}-3\frac{4}{5}=$ R : $\frac{13}{15}$ b). $2\frac{5}{15}+3\frac{1}{18}-4\frac{1}{6}=$ R : $1\frac{2}{9}$

c). $\frac{10}{16}+1\frac{6}{15}-\frac{3}{30}-\frac{15}{100}=$ R : $1\frac{31}{40}$ d). $\frac{16}{36}+2\frac{7}{21}-\frac{6}{36}-\frac{7}{30}=$ R : $2\frac{17}{45}$

e). $\frac{35}{120}+\frac{21}{27}-\frac{25}{90}=$ R : $\frac{19}{24}$

4). Să se verifice egalităţile :

a). $\frac{1}{12}+\frac{3}{16}+\frac{7}{24}=\frac{9}{16}$ d). $\frac{5}{9}+\frac{1}{12}+\frac{7}{18}=1+\frac{1}{36}$

b). $\frac{1}{24}+\frac{2}{42}+\frac{11}{56}=\frac{13}{42}$ e). $4+\frac{2}{3}+\frac{5}{15}+\frac{1}{2}=\frac{3}{6}+2+\left(\frac{13}{12}+\frac{10}{24}\right)$

c). $\frac{1}{6}+\left(\frac{1}{18}+\frac{1}{24}\right)=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{18}\right)+\frac{1}{24}$ f). $\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{35}\right)+\left(2+\frac{1}{14}\right)=\left(2+\frac{3}{30}\right)+\left(\frac{1}{35}+\frac{2}{28}\right)$

5). Să se calculeze (simplificând rezultatul) :

a). $\frac{5}{36}+\frac{3}{48}+\frac{8}{18}+\frac{11}{72}=$ R : $\frac{115}{144}$ b). $\frac{23}{378}+\frac{17}{84}+\frac{23}{108}=$ R : $\frac{10}{21}$

c). $\frac{1}{132}+\frac{4}{88}+\frac{3}{99}+\frac{6}{72}=$ R : $\frac{1}{6}$ d). $\frac{8}{75}+\frac{7}{45}+\frac{6}{675}+\frac{4}{225}=$ R : $\frac{13}{45}$

e). $\frac{1}{39}+\frac{4}{117}+\frac{6}{169}=$ R : $\frac{145}{1521}$ f). $\frac{31}{144}+\frac{1}{120}+\frac{19}{720}=$ R : $\frac{1}{4}$

g). $\frac{13}{135}+\frac{8}{90}+\frac{44}{54}=$ R : 1 h). $\frac{2}{56}+\frac{4}{140}+\frac{5}{200}+\frac{3}{280}=$ R : $\frac{1}{10}$

i). $\frac{1}{3^2\cdot 7}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3^2\cdot 7^2}+\frac{1}{3\cdot 7^2}=$ R : $\frac{4}{21}$

j). $\frac{1}{5\cdot 7\cdot 11}+\frac{20}{5^2\cdot 7^2\cdot 11}+\frac{3}{5\cdot 7^2}+\frac{1}{7^2\cdot 11}=$ R : $\frac{1}{55}$

k). $\frac{1}{2^2\cdot 3^4}+\frac{1}{2^4\cdot 3^7}+\frac{1}{2^3\cdot 3^5}+\frac{1}{2^3\cdot 3^7}=$ R: $\frac{43}{2^4\cdot 3^6}$

6). Verifică dacă rezultatele sunt corecte :

a). $\frac{312}{11^2\cdot 13^3}-\frac{2}{11\cdot 13^3}-\frac{1}{11^2\cdot 13}=$ R : $\frac{1}{13^3}$ b). $1-\left[\frac{10}{63}+\left(\frac{5}{42}-\frac{1}{18}\right)+\frac{2}{21}\right]=$ R : $\frac{43}{63}$

c). $\left(\frac{3}{56}-\frac{1}{28}\right)-\left(\frac{8}{42}-\frac{10}{56}\right)=$ R : $\frac{1}{168}$ d). $\frac{3}{8}-\left[\frac{3}{14}-\left(\frac{5}{28}-\frac{11}{84}\right)\right]=$ R : $\frac{5}{24}$

7). Verifică dacă rezultatele sunt corecte :

a). $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+\left[\frac{1}{12}+\left(\frac{1}{16}+\frac{3}{8}\right)\right]=$ R : $\frac{61}{48}$ b). $\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\right)+\left[\left(\frac{6}{9}+\frac{7}{18}\right)+\frac{34}{36}\right]=$ R : 3

c). $\frac{1}{3}+\left(\frac{5}{6}+3\right)+\frac{3}{18}=$ R : $\frac{13}{3}$ d). $\left(3+\frac{1}{3}\right)+\left[\frac{5}{6}+\left(\frac{1}{4}+2\right)+\frac{1}{8}\right]=$ R : $\frac{157}{24}$

8). Te ştiu perseverent. Dovedeşte :

a). $\frac{3}{4}+\frac{1}{3}-\left(1-\frac{1}{2}\right)=$ b). $\frac{5}{6}+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=$ c). $\frac{15}{16}-\frac{1}{2}-\left(\frac{7}{8}-\frac{3}{4}\right)=$

d). $4-\frac{1}{8}-\left[2-\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{4}\right)\right]=$ e). $\frac{13}{20}+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)=$ f). $\frac{31}{24}-\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{6}+\frac{3}{4}\right)=$

g). $7-\left[4-\left(2-\frac{1}{7}-\frac{1}{3}\right)\right]=$ h). $2-\left(\frac{13}{8}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{12}\right)=$ i). $\frac{24}{11}-\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{22}+\frac{3}{11}\right)=$

j). $\frac{5}{6}+\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)=$ k). $\frac{13}{10}-\frac{7}{20}-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\right)=$ l). $\frac{7}{15}+\frac{17}{5}-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)=$

m). $\frac{17}{30}-\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{15}\right)=$ n). $\frac{4}{5}+\frac{7}{8}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)=$

9). Să se calculeze :

a). $\left(\frac{5}{13}+\frac{16}{26}\right)+\left(\frac{7}{9}-\frac{12}{27}\right)-\frac{5}{6}=$ b). $\frac{3}{20}+\frac{5}{30}-\frac{17}{60}=$ c). $\frac{6}{5}+1\frac{1}{8}+\frac{3}{20}-2\frac{1}{4}=$

d). $\left(\frac{5}{71}+\frac{132}{142}\right)+1\frac{2}{4}-2=$ e). $4-\frac{3}{5}+\frac{9}{10}-\frac{3}{2}=$

10). Ai încredere în tine ? Încearcă :

a). $5\frac{5}{6}-2\frac{1}{9}-\left(4-3\frac{1}{3}\right)=$ $R:3\frac{1}{18}$

b). $6-\frac{4}{15}-3\frac{7}{12}=$ $R:2\frac{3}{20}$

c). $2\frac{1}{4}+3\frac{1}{5}-\frac{7}{10}=$ $R:4\frac{3}{4}$

d). $3+2\frac{1}{22}-3\frac{4}{33}=$ $R:1\frac{61}{66}$

e). $1\frac{3}{28}+\frac{5}{21}-1\frac{1}{7}=$ $R:\frac{17}{84}$

f). $3\frac{8}{9}+\frac{7}{12}-2\frac{11}{30}=$ $R:2\frac{19}{180}$

g). $5-2\frac{3}{8}+\frac{5}{6}=$ $R:3\frac{11}{24}$

h). $3\frac{1}{6}-\left(2\frac{1}{2}-1\frac{1}{3}\right)=$ $R:2$

i). $4\frac{3}{7}-\left(4-2\frac{1}{2}+\frac{3}{7}-\frac{1}{4}\right)=$ $R:2\frac{3}{4}$

j). $7-\left(2\frac{1}{6}+3\frac{1}{9}\right)=$ $R:1\frac{13}{18}$

k). $8\frac{10}{35}-\left(1\frac{2}{28}+3\frac{15}{63}\right)=$ $R:3\frac{41}{42}$

l). $1\frac{3}{5}-\frac{1}{2}+6-\left(3\frac{1}{10}-\frac{4}{5}\right)=$ $R:4\frac{4}{5}$

m). $4\frac{7}{15}-\left(3\frac{8}{20}-2\frac{11}{30}\right)=$ $R:3\frac{13}{30}$

n). $7+2\frac{9}{36}-\left(1\frac{6}{32}+3\frac{35}{56}\right)=$ $R:4\frac{7}{16}$

o). $8-3\frac{7}{70}-\left[5-\left(1\frac{20}{150}+2\frac{55}{66}\right)\right]=$ $R:3\frac{13}{15}$

***

11). Să se determine cifra a astfel încât :

a). $\frac{\overline{3a}}{12}+\frac{a}{6}=\frac{\overline{a2}}{12}$ b). $\frac{\overline{2a}}{8}+\frac{\overline{a1}}{16}=\frac{77}{16}$ c). $\frac{\overline{a4}}{16}-\frac{\overline{2a}}{8}=\frac{1}{4}$

12). O echipă este formată din 3 muncitori. Dacă primul lucrând singur ar termina o lucrare în 4 ore, al doilea lucrând singur ar termina aceeaşi lucrare în 6 ore şi al treilea ar termina lucrarea în 12 ore, în câte ore o vor termina dacă lucrează împreună ?

13). Într-un bidon sunt $12\frac{3}{4}$ litri de lapte. Câţi litri de lapte s-au vândut dacă au mai rămas în bidon $4\frac{1}{4}$l ?

14). Radu a citit într-o zi $\frac{12}{27}$ dintr-o carte cu poveşti, iar a doua zi cu $\frac{2}{27}$ mai puţin. Cât mai are de citit din cartea cu poveşti ?

15). Pentru o bluză se folosesc $1\frac{2}{3}$ m de material. Dintr-o bucată de 10 m s-a tăiat o bucată

necesară confecţionării a două bluze. Ce lungime are bucata rămasă ?

16). Bunicul a cultivat sfeclă pe $\frac{1}{11}$ din grădina sa, varză pe o suprafaţă cu $\frac{2}{11}$ mai mare, iar ceapă pe $\frac{4}{11}$ din suprafaţă. Ce parte din suprafaţa grădinii rămâne pentru a cultiva morcovul ?

Înmulţirea

*

1). Să se efectueze simplificând rezultatul :

a). $\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}=$ R : $\frac{1}{10}$

b). $\frac{3}{7}\cdot\frac{14}{9}=$ R : $\frac{2}{3}$

c). $\frac{2}{3}\cdot 6=$ R : 4

d). $\frac{6}{11}\cdot\frac{22}{9}\cdot\frac{3}{2}=$ R : 2

e). $\frac{5}{6}\cdot\frac{18}{25}\cdot\frac{30}{9}\cdot\frac{1}{4}=$ R : $\frac{1}{2}$

f). $\frac{7}{9}\cdot\frac{12}{5}\cdot\frac{10}{21}\cdot\frac{3}{8}=$ R : $\frac{1}{3}$

g). $12\cdot\frac{5}{8}\cdot 40\cdot\frac{1}{125}\cdot\frac{5}{36}=$ R : $\frac{1}{3}$

h). $\frac{2^3}{3^4}\cdot\frac{3\cdot 5}{2^2}\cdot\frac{3^2}{5^3}\cdot\frac{5}{2\cdot 3}\cdot\frac{3^2}{1}=$ R : $\frac{1}{5}$

i). $4\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{2}{15}\cdot 25\cdot\frac{1}{27}\cdot 3=$ R : $1\frac{2}{3}$

**

2). Efectuaţi înmulţirea după ce aţi introdus întregii :

a). $2\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{28}=$ R : $\frac{3}{4}$

b). $1\frac{1}{2}\cdot 4=$ R : 6

c). $4\frac{1}{4}\cdot\frac{8}{17}=$ R : 2

d). $2\frac{1}{2}\cdot 7\frac{1}{5}=$ R : 18

e). $5\frac{3}{8}\cdot 1\frac{5}{43}=$ R : 6

f). $\frac{2}{3}\cdot 1\frac{1}{8}\cdot\frac{5}{6}=$ R : $\frac{5}{8}$

g). $2\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{9}=$ R : $1\frac{1}{3}$

h). $3\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{10}\cdot 1\frac{1}{8}=$ R : $\frac{3}{2}$

i). $14\cdot 1\frac{3}{6}\cdot\frac{13}{27}\cdot\frac{1}{26}\cdot\frac{10}{15}\cdot 2\frac{4}{7}=$ R : $\frac{2}{3}$

j). $\frac{7}{15}\cdot 9\cdot 1\frac{11}{14}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{18}\cdot 2=$ R : $\frac{2}{3}$

h). $\frac{15}{16}\cdot\frac{12}{25}\cdot 1\frac{1}{9}\cdot 6\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{11}\cdot 8\frac{1}{4}=$ R : $\frac{81}{16}$

3). Să se efectueze respectând ordinea efectuării operaţiilor :

a). $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5}=$ R : $1\frac{1}{3}$

b). $1\frac{1}{2}+\frac{4}{9}\cdot 2\frac{1}{4}=$ R : $2\frac{1}{2}$

c). $3\frac{1}{8}\cdot 4+1\frac{3}{4}=$ R : $14\frac{1}{4}$

d). $\frac{3}{11}\cdot 1\frac{3}{8}-\frac{4}{22}=$ R : $\frac{17}{88}$

e). $3\frac{1}{5}\cdot\frac{10}{20}+\frac{2}{15}\cdot 1\frac{5}{10}=$ R : $1\frac{4}{5}$

f). $3\frac{4}{7}\cdot 7\frac{3}{5}-2\frac{1}{2}\cdot 2=$ R : $22\frac{1}{7}$

g). $3\cdot\frac{4}{15}-2\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{33}=$ R : $\frac{19}{30}$

h). $\frac{5}{6}\cdot\frac{8}{10}+1\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{6}=$ R : $1\frac{2}{3}$

i). $2\frac{25}{40}+3\frac{1}{7}\cdot\frac{14}{11}=$ R : $6\frac{5}{8}$

j). $7\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{59}+\frac{1}{4}=$ R : $\frac{3}{8}$

k). $3\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{19}+4\frac{1}{2}\cdot 1\frac{1}{3}=$ R : $6\frac{2}{3}$

4). Vrei să iei o notă bună ? Calculează :

a). $\frac{4}{19}\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=$ R : $\frac{7}{57}$ b). $1\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{18}\right)=$ R : $\frac{1}{20}$

c). $\left(\frac{2}{5}\cdot3\frac{1}{3}-1\right)\cdot1\frac{4}{5}+\frac{1}{10}=$ R : $\frac{7}{10}$ d). $10\cdot\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{7}-\left(2\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{10}-\frac{3}{5}\right)\right]=$ R : $\frac{38}{7}$

e). $\left(\frac{10}{63}-\frac{1}{9}\right)\cdot21+4\cdot\frac{5}{8}=$ R : $\frac{7}{2}$ f). $\left[\frac{1}{15}+\frac{5}{64}\cdot1\frac{7}{25}-2\cdot\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{12}\right)\right]\cdot10=$ R : $\frac{5}{6}$

g). $\frac{1}{17}\cdot\left(\frac{5}{28}+\frac{1}{42}\right)\cdot\frac{21}{2}=$ R : $\frac{1}{8}$ h). $\left[1-\left(\frac{8}{35}-\frac{2}{15}\right)\cdot1\frac{2}{12}\right]\cdot\frac{18}{40}-4\frac{4}{5}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=$ R : 0

i). $\left(\frac{3}{7}\cdot2\frac{3}{9}+\frac{2}{5}\cdot4\frac{1}{6}-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{24}{29}=$ R : 2 j). $\left[3\frac{3}{11}\cdot\left(\frac{1}{18}+\frac{5}{12}+\frac{7}{24}\right)-\frac{7}{4}\right]\cdot\frac{10}{15}=$ R : $\frac{1}{2}$

5). Calculaţi : $\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{50}\right)=$

Împărţirea

*

1). Câte exerciţii poţi rezolva în zece minute. Încearcă :

a). $\frac{1}{2}:\frac{1}{4}=$ b). $\frac{3}{5}:\frac{1}{25}=$ c). $\frac{7}{12}:\frac{14}{3}=$ d). $\frac{11}{5}:2=$ e). $\frac{14}{3}:7=$

f). $15:\frac{3}{8}=$ g). $2\frac{1}{3}:\frac{7}{9}=$ h). $3\frac{1}{10}:10=$ i). $12:1\frac{1}{5}=$ j). $5\frac{1}{2}:8\frac{1}{4}=$

k). $7:4\frac{2}{3}=$ l). $4\frac{2}{6}:2\frac{1}{6}=$ m). $2\frac{4}{7}:\frac{12}{14}=$ n). $4\frac{1}{5}:\frac{3}{25}=$

o). $3\frac{10}{13}:2\frac{1}{26}=$ p). $1\frac{1}{8}:6=$ r). $3\frac{1}{6}:2\frac{3}{8}=$ s). $4:2\frac{1}{2}=$

2). Verică dacă ai înţeles lecţia :

a). $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{9}}=$ b). $\dfrac{1}{\frac{1}{6}}=$ c). $\dfrac{10}{\frac{5}{3}}=$ d). $\dfrac{1\frac{1}{3}}{16}=$ e). $\dfrac{2\frac{1}{2}}{10}=$ f). $\dfrac{\frac{3}{7}}{9}=$

g). $\dfrac{5}{3\frac{1}{3}}=$ h). $\dfrac{1\frac{1}{5}}{12}=$ i). $\dfrac{2\frac{1}{3}}{3\frac{1}{2}}=$ j). $\dfrac{12}{3\frac{2}{6}}=$ k). $\dfrac{\frac{5}{6}}{2\frac{11}{12}}=$ l). $\dfrac{\frac{8}{9}}{1\frac{1}{3}}=$

Indicaţie : $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}:\frac{4}{9}=\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{4}=\frac{18}{12}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$.

**

3). Nu te speria, că nu sunt grele :

a). $\dfrac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}}{\dfrac{5}{6}}=$

d). $\dfrac{2}{\left(\dfrac{5}{6}+\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{2}\right):\dfrac{5}{7}-\dfrac{11}{15}}=$

g). $\dfrac{50}{1:\dfrac{1}{2}}=$

j). $7-\dfrac{5\dfrac{1}{2}-4\dfrac{3}{4}}{2-\dfrac{7}{8}}=$

b). $\dfrac{3-\dfrac{2}{7}}{19}=$

e). $\dfrac{\left(\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{7}-\dfrac{9}{35}\right)\cdot 2\dfrac{1}{3}}{4\dfrac{1}{2}}=$

h). $1+\dfrac{7}{3-\dfrac{1}{5}}=$

k). $4-\dfrac{1}{1+\dfrac{1\dfrac{5}{9}}{3-1\dfrac{5}{6}}}=$

c). $\dfrac{4\left(\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{6}\right)}{2\dfrac{2}{9}}=$

f). $\dfrac{\left(\dfrac{1}{10}+\dfrac{3}{5}\right):7+2}{1\dfrac{2}{5}}=$

i). $16-\dfrac{9}{4-3\dfrac{2}{5}}=$

Ordinea efectuării operaţiilor

**

1). Consolidează-ţi cunoştinţele şi calculează :

a). $\dfrac{3}{10}\cdot\dfrac{28}{9}\cdot 2\dfrac{2}{14}=$

b). $1\dfrac{2}{5}\cdot\left(4\dfrac{1}{7}-3\dfrac{1}{14}\right)=$

c). $6\dfrac{6}{11}\cdot\left(\dfrac{5}{24}+\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{21}{36}\right)=$

d). $\left(2+\dfrac{16}{7}\right)\cdot\left(\dfrac{6}{45}-\dfrac{2}{90}\cdot\dfrac{3}{4}\right)=$

e). $2^3:3\dfrac{1}{5}:\left(\dfrac{2}{5}\right)^2-\left(\dfrac{3}{20}-\dfrac{4}{30}\right)\cdot 6=$

f). $\left(\dfrac{5}{16}-\dfrac{5}{24}\right):\dfrac{15}{72}+2\dfrac{1}{3}:5\dfrac{1}{4}=$

g). $\dfrac{\dfrac{6}{112}+\dfrac{3}{56}:\dfrac{1}{14}}{4\dfrac{1}{2}}=$

h). $\dfrac{4\dfrac{2}{3}\cdot\left(\dfrac{15}{54}-\dfrac{4}{18}\right)}{\left(1\dfrac{3}{7}+\dfrac{1}{14}\right):\dfrac{3}{7}}=$

2). a). $\left[\left(\dfrac{3}{8}+\dfrac{5}{12}\right)\cdot\dfrac{1}{19}+\dfrac{1}{4}\right]:2\dfrac{5}{8}=$ R: $\dfrac{1}{9}$

b). $\left[\left(\dfrac{4}{15}+\dfrac{7}{20}-\dfrac{1}{6}\right):\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{5}\right)\right]\cdot 2=$ R: 1

c). $1\dfrac{1}{5}\cdot\left(2-\dfrac{2}{3}:\dfrac{4}{9}\right)-\dfrac{17}{10}:17=$ R: $\dfrac{1}{2}$

d). $\left[\left(\dfrac{3}{7}+\dfrac{4}{21}\right):\left(\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{14}\right)-3\dfrac{1}{5}\right]\cdot 10=$ R: 8

e). $2:\left\{2-2:\left[2^2-2:\left(1\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{10}\right]\right\}=$ R: 11

f). $\frac{1}{12}:\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)+\left(1\frac{1}{3}-2\frac{1}{7}:1\frac{11}{14}\right)\cdot\frac{1}{17}=$ R : $\frac{8}{45}$

g). $\left(\frac{7}{40}+\frac{11}{60}-\frac{4}{15}\right):\left(\frac{3}{20}+\frac{7}{18}+\frac{8}{60}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{9}\right)=$ R : $\frac{1}{6}$

h). $\frac{11}{5}:\left(2\frac{2}{3}-1\frac{1}{5}\right)+1:\left[\left(\frac{5}{3}+\frac{1}{7}-\frac{2}{21}\right)\cdot\frac{1}{6}\right]=$ R : 5

i). $\frac{1}{\frac{5}{6}-\frac{7}{18}-\frac{5}{12}}-21\cdot\left(\frac{1}{21}+\frac{5}{14}+1\frac{1}{6}\right)=$ R : 3

j). $\left[\frac{1}{\left(\frac{7}{25}+\frac{8}{50}\right):1\frac{46}{75}}-\frac{2}{3}\right]\cdot 2\frac{1}{3}=$ R : 7

3). Dovedeşte că poţi şi calculează :

a). $\frac{3}{10}\cdot\frac{28}{9}\cdot 2\frac{2}{14}=$ b). $1\frac{2}{5}\cdot\left(4\frac{1}{7}-3\frac{1}{14}\right)=$ c). $6\frac{6}{11}\cdot\left(\frac{5}{24}+\frac{2}{3}\cdot\frac{21}{36}\right)=$

d). $\left(2+\frac{16}{7}\right)\cdot\left(\frac{6}{45}-\frac{2}{90}\cdot\frac{3}{4}\right)=$ e). $2^3:3\frac{1}{5}:\left(\frac{2}{5}\right)^2-\left(\frac{3}{20}-\frac{4}{30}\right)\cdot 6=$

f). $\left(\frac{5}{16}-\frac{5}{24}\right):\frac{15}{72}+2\frac{1}{3}:5\frac{1}{4}=$ g). $\frac{\frac{6}{112}+\frac{3}{56}:\frac{1}{14}}{4\frac{1}{2}}=$ h). $\frac{4\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{15}{54}-\frac{4}{18}\right)}{\left(1\frac{3}{7}+\frac{1}{14}\right):\frac{3}{7}}=$

4). Vrei să iei o notă bună ? Calculează :

a). $\frac{5}{3^6}\cdot 9^2+\frac{7}{2^{16}}:\frac{21}{2^{18}}=$ b). $6^4\cdot\frac{7}{2^5\cdot 3^6}-4^6:\frac{2^{16}}{6}=$

c). $\frac{2^{40}+4^{20}}{8^{13}}=$ d). $\frac{6^{30}+2^{31}\cdot 3^{29}}{5\cdot 6^{28}}=$

5). Efectuaţi :

a). 3,16 + 2,8 = b). 5 – 3,19 = c). 6 + 3,9 + 4,1 – 12,18 =
d). 5,3 – 4,79 = e). 4 – 3,178 + 0,028 + 0,15 = f). 5 · 0,3 – 0,18 =
g). 0,18 · 25 – 3,65 = h). 5,6 + 4,3 · 2,8 = i). 7 – 2,2 · 1,5 =
j). 1,3 · 0,15 + 0,89 = k). 2,16 : 6 + 0,12 = l). 14,4 : 0,6 – 3^2 =

6). Tu decizi dacă vrei o notă mai bună. Calculează :

a). 8^2 – 5,4 : 0,09 = b). $1,2^2-1,1^2$ =
c). 5,6 : 2^3 + 0,3 = d). (3,8 – $0,5^2$ · 10) – $0,5^3$ · 100 =

e). $(0,8 + 4,32 : 2,4) : 13 =$

f). $\frac{1,8^2 - 3,14}{5,3 - 2,2^2} \cdot 2,3 =$

g). $\frac{0,1(3) + 0,1(6)}{0,6} + 0,2(27) =$

h). $\frac{4,32 : 0,2 : 0,3 - 8^2}{5,6 : 7} - 3^2 =$

i). $[3,(8) - 1,5] : 4,3 =$

j). $\left[0,(6) + \frac{5,13}{9}\right] : 3,71 - 0,(3) =$

k). $\frac{0,58 : 2 - 0,5^2}{0,18} - 0,(2) =$

l). $\frac{3,61 : 0,19 - 4^2}{0,(3)} =$

7). Să se rezolve în Q :

a). $4x = 92$ b). $5x = 1,05$ c). $2\frac{1}{3}x = 5\frac{1}{3}$ d). $0,6x = 1,92$ e). $0,3x = 0,(3)$

f). $0,8x = 4$ g). $3x = 0,18$ h). $\frac{x}{3} = 1,9$ i). $2\frac{1}{2}x = 2,5$ j). $0,(6)x = \left(\frac{2}{3}\right)^2$

8). Să se rezolve în Q :

a). $2x + 3 = 17$ b). $5x + 0,1 = 2,6$ c). $3x - \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$ d). $4x + 0,(2) = 4,(3)$

e). $\frac{x}{2} + 3 = 4\frac{1}{2}$ f). $\frac{2x}{3} - 0,2 = 4\frac{1}{3}$ g). $2x + \frac{3x}{4} + 2 = 5\frac{3}{4}$

9). Fie mulţimile :

a). $A = \left\{x \in N \middle| \frac{4x}{10} + 8 = 12,4\right\}$ b). $B = \{x \in N | 4 \le x \le 15, x \text{ prim}\}$

c). $C = \{x \in N | 10 \le x \le 15, x \,\vdots\, 3\}$ d). $D = \{x \in N | \overline{2x2} \,\vdots\, 3\}$

Să se afle : $(A - B) \cup (C \cap D)$; $(B \cap D) \cup (A \cap B)$; $(C - A) - (C - B)$

10). Un număr este egal cu 3/8 din altul si suma lor este 2,2. Să se afle numerele.

11). Să se afle un număr ştiind că scoţând 2/3 din el obţinem 7.

12). Fii perseverent şi calculează :

a). $\frac{5}{6} + \frac{5}{6} : 3\frac{1}{3} - \frac{3}{20} =$

b). $\left[\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{15}\right) \cdot 2\frac{3}{4} - \frac{5}{72}\right] : \left(\frac{4}{5}\right)^2 =$

c). $\frac{3}{5} : 0,6 + 1,2^2 : \frac{1}{0,(3)} : 0,2 =$

d). $[5,(6) + 4,5] : 0,61 + 3,(3) =$

e). $(3,18 + 1,2^2 : 0,3^2 - 10) : 0,9 =$

13). Vrei să fi şi tu printre primii din clasă ? Calculează :

a). $\left[\frac{5}{18} + 0,(7)\right] : 3,8 + 2,(7) =$

b). $\left(\frac{2}{3} + 2\frac{1}{5} : \frac{11}{20} - 4\frac{1}{2}\right) \cdot 3^2 - \frac{1}{5} =$

c). $8 \cdot \left[3\frac{1}{3} - \left(\frac{11}{15} - \frac{4}{6}\right)\right] =$

d). $\left(\frac{3}{2}\right)^6 \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)^5 : \frac{81}{16} \cdot \frac{1}{\left(4 - 2\frac{1}{2}\right)^4} =$

e). $\left(1,8:2,4-\frac{1}{6}\cdot 2\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{20}{7}=$ f). $\dfrac{2,(3)\cdot\frac{1}{7}-0,2(8)}{0,2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2}=$

14). Testează-te singur calculând :

a). $\left\{\frac{7}{36}-\frac{1}{46}\cdot[5,(6)-3,75]\right\}:1\frac{3}{8}=$ b). $\left[0,2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2+0,25\right]:\frac{7}{12}$

c). $\left[0,(3)+0,5+\frac{1}{12}\right]:\left[1-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]$

d). Să se calculeze numărul cu 0,1(6) mai mic decât suma dintre $a=2\frac{5}{6}:\frac{17}{3}+2\frac{1}{2}$ şi $b=(0,5^2-0,25^2)\cdot 2^4$.

15). a). Arătaţi că : $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, oricare $n\in N$.

b). Calculaţi : i). $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{24\cdot 25}=$ ii). $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+...+\frac{1}{99}=$

16). a). Arătaţi că : $\frac{k}{n(n+k)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}$, oricare $n, k\in N$.

b). Calculaţi : i). $\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 7}+\frac{2}{7\cdot 9}+...+\frac{2}{31\cdot 33}=$

ii). $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{2}{2\cdot 4}+\frac{3}{4\cdot 7}+\frac{4}{7\cdot 11}+\frac{5}{11\cdot 16}+\frac{6}{16\cdot 22}+\frac{7}{22\cdot 29}+\frac{8}{29\cdot 37}=$

17). Calculaţi : $\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+...+\frac{1}{1+2+...+100}=$

18). a). Arătaţi că : $\frac{1}{k(k+1)}<\frac{1}{k^2}<\frac{1}{k(k-1)}$, $k\geq 2, k\in N$.

b). Demonstraţi că : $\frac{1}{3}<\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{20^2}<\frac{19}{20}$

19). Demonstraţi că : $\frac{4}{5}<\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{49\cdot 50}<1$

Testul 1

1). Daţi câte un exemplu de :

⑤p a). fracţie subunitară cu numitorul 5 : ....

⑤p b). fracţie supraunitară cu numărătorul 3 : ....

⑤p c). fracţie echiunitară : ....

⑤p d). fracţie echivalentă cu $\frac{2}{3}$.

2). Calculaţi : ⑦p a). $\frac{5}{8}+\frac{1}{2}-\left(\frac{8}{24}-\frac{5}{30}\right)=$ ⑦p b). $\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{15}{30}=$

(9) 1p 3). Un copil care avea 12960 lei a cheltuit $\frac{7}{12}$ din ei şi apoi 35% din rest. Câţi lei i-au mai rămas ?

(9) 1p 4). Să se determine $x \in N$ ştiind că $\frac{6}{2x+1} \in N$.

(10) 1p 5). Demonstraţi că fracţia $\frac{3n+4}{5n+7}$ este ireductibilă.

Testul 2

(5) 2p 1). Amplificaţi fracţiile de mai jos cu 3 : a). $\frac{5}{6}$; b). $\frac{7}{4}$.

(5) 2p 2). Calculaţi : a). $\frac{11}{18} - \frac{7}{18}$ b). $\frac{4}{5} + \frac{6}{5}$.

(7) 1p 3). Să se simplifice fracţia, obţinând o fracţie ireductibilă : $\frac{72}{240}$.

(7) 1p 4). Să se afle $x \in N$ astfel încât $\frac{3x+2}{5+2x}$ să fie echiunitară.

(9) 1p 5). O persoană cheltuieşte într-o zi 5/12 din suma de 480.000 lei pe care o avea. A doua zi cheltuieşte 1/4 din rest, iar a treia zi 5/9 din suma cheltuită în cele două zile la un loc. Câţi lei i-au rămas ?

(9) 1p 6). Fracţiile supraunitare de forma $\frac{\overline{3x}}{\overline{x0}}$ sunt ....

(10) 1p 7). Demonstraţi că fracţia : $\frac{3 \cdot 2^{n+3} + 2^{n+2} - 2^{n+1}}{4 \cdot 6^{n+1} + 2^{n+1} \cdot 3^{n}}$ este subunitară, pentru orice $n \in N^*$.

Testul 3

(5) 4p 1). a). Amplificaţi $\frac{3}{5}$ pentru a obţine o fracţie cu numitorul 25;   b). Simplificaţi : $\frac{48}{90}$;

c). Calculaţi : $\frac{12}{5} - \left(\frac{3}{5} + \frac{8}{5}\right) =$;   d). Daţi exemplu de : i). fracţie subunitară; ii). fracţie supraunitară.

(7) 2p 2). Să se efectueze : a). $\frac{7}{6} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) =$ b). $2\frac{3}{5} - \left(3\frac{1}{10} - 2\frac{1}{2} + 1\right) =$

(9) 2p 3). a). Să se determine $n \in N$ dacă $\frac{9}{2n+1}$ este supraunitară.

b). Să se determine $n \in N$ dacă $\frac{3}{2n+1} \in N$.

(10) 1p 4). Să se simplifice : $\frac{\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}}{\overline{aaa} + \overline{bbb} + \overline{ccc}}$.

Fracţii periodice

*

1). Să se scrie cu virgulă : $\frac{2}{3}; \frac{7}{3}; \frac{4}{9}; \frac{13}{6}; \frac{1}{15}; \frac{10}{7}; \frac{3}{11}; \frac{5}{22}; \frac{7}{18}; \frac{25}{36}; \frac{11}{12}$

2). Să se transforme în fracţii ordinare ireductibile : 0,(2); 0,(8); 1,(4); 0,(14); 0,(007);

3,(27); 0,5(4); 0,07(2); 0,21(02); 1,3(12); 2,05(7); 0,4(27); 1,0(21)

*** ***

3). Verifică-ţi cunoştinţele învăţate calculând :

a). $7,(3) : 11 - 0,5 =$ R: $\frac{1}{6}$ b). $2,(27) : 5 + 0,2 =$ R: $\frac{36}{55}$

c). $1,(45)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 0,3 =$ R: $\frac{53}{110}$ d). $1,(63):\left(\frac{3}{11}\right)^2 - 20,4 =$ R: $\frac{8}{5}$

e). $1,(5) + 1,4(8) =$ R: $\frac{137}{45}$ f). $3,(18):0,7 + \frac{1}{22} =$ R: $\frac{101}{22}$

g). $2,5(7) : 6,(4) - 0,15 =$ R: $\frac{1}{4}$ h). $[4,3(5) + 3,(8)] : 0,7 =$ R: $\frac{106}{9}$

i). $4,(6) : 3,(1) + 2,5 =$ R: 4 j). $0,15 + 1,1(3) : 3,(7) =$ R: $\frac{9}{20}$

k). $2,1(6) : 0,36(1) - 5,(3) =$ R: $\frac{2}{3}$ l). $1,(3) : 1,6 + 2,(3) =$ R: $\frac{19}{6}$

m). $6,(54) : 1,(36) - 0,4 =$ R: $\frac{22}{5}$ n). $2,(4) : 22 + 3,(7) =$ R: $\frac{44}{9}$

o). $14,(2) : 1,(93) + 3,(6) =$ R: 11 p). $0,0(81) + 1,(1) : 5,(3) =$ R: $\frac{383}{1320}$

r). $6,(4) : 9,(6) + 4,(3) =$ R: 5 s) $1,(69) : 1,(7) + 0,5 =$ R: $\frac{16}{11}$

t). $25 : 33,(3) + 2,(2)\cdot 2,4 =$ R: $\frac{73}{12}$ u). $[1,(3)]^2 : 2^4 - 0,01 =$ R: $\frac{91}{900}$

v). $0,(6) : \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 1,(3) =$ R: $\frac{1}{6}$ x). $[0,2(6) : 2^2 + 0,85] : 0,5 =$ R: $\frac{11}{6}$

*** * ***

4). Dacă efectuezi primul exemplu, următoarele ţi se vor părea uşoare :

a). $\left[0,4(6):\frac{14}{3} + 0,4\right]:2,5 =$ R: $\frac{1}{5}$ b). $\frac{24,2 + \frac{4}{5}}{4,(54)} =$ R: $\frac{11}{2}$

c). $\frac{0,1(3) + 0,0(5)}{5,(6)} =$ R: $\frac{1}{30}$ d). $\frac{0,(27) + 0,25}{\frac{23}{44}} =$ R: 1

e). $\frac{1,2(6)}{19} - 0,0(6) =$ R: 0 f). $\left[0,(5)\cdot 1,35 + 1,2(7):\frac{46}{12}\right]:\frac{0,13}{0,12} =$ R: 1

g) $\left[0,(2)\cdot 1,875 + 1,(27):\frac{7}{22}\right]:\frac{0,53}{0,12} =$ R: 1

h). $[0,1(2) + 2,(3) - 1,0(8)] : 13,(6) =$ R: $\frac{1}{10}$

i). $5,25 : 0,05 - 7,5 \cdot [2,5 + 3,(6)] + 1,25 =$ R : 60

j). $\left[0,(5) \cdot 0,72 + 1,3(6) : \frac{41}{10}\right] : \frac{0,(16)}{0,(15)} =$ R : $\frac{11}{16}$

5). Precizaţi, descompunând în factori primi numitorul (după ce aţi simplificat fracţiile la fracţii ireductibile), ce fel de fracţii se vor obţine (zecimale, periodice sau periodice mixte), fără a efectua împărţirea : $\frac{2}{3}; \frac{10}{4}; \frac{8}{30}; \frac{35}{30}; \frac{15}{24}; \frac{1}{40}; \frac{8}{11}; \frac{15}{66}; \frac{3}{14}; \frac{16}{42}; \frac{6}{35}; \frac{4}{9}; \frac{14}{40}$.

Testul 1

1). Calculaţi :

⑤1p a). $10,6 + 2,32 =$....... 5 1p b). $5,72 - 4,3 =$......

⑤1p c). $16 - 12,48 =$....... 5 1p d). $2,8 \cdot 5 =$.......

⑦1p 2). Ordonaţi : a). $\frac{2}{5}$; 0,44 ; $\frac{13}{30}$:....... b). 0,(1); 0,1; 0,(12) :.......

⑨1p 3). Calculaţi : $3,6 - 5 \cdot [4,3 : 0,04 - (0,6^2 \cdot 300 - 1^{2000})]$.

⑨1p 4). Efectuaţi : $\left\{\left[2\frac{1}{3} - 0,(3)\right]^3 : \left[\frac{19}{10} : 0,12 + 0,8(3)\right] + 0,12\right\} \cdot 5$.

⑩1p 5). Fie $x = \left\{[0,75 + 0,(6)] : 17 + 0,5 : \frac{1}{0,3} + 0,01(6)\right\} \cdot 48$. Să se determine diferenţa dintre cubul numărului x şi triplul pătratului său.

Testul 2

1). Calculaţi :⑤1p a). $1,28 + 11,2 =$ ⑤1p b). $7,03 \cdot 12 =$

2). Aflaţi : ⑤1p a).numărul cu 5 mai mic decât 8,9.

⑤1p b). numărul de 7 ori mai mare decât 3,5.

⑦1p 3). Aflaţi $x \in Q$: $x + 0,(6) = 3 - \left(\frac{5}{4} + \frac{1}{2}\right)$

⑦1p 4). Calculaţi : $[0,(3) + 0,5^2] + \frac{5}{12} =$

⑨1p 5). Aproximaţi rezultatul împărţirii cu o eroare de o zecime prin lipsă : 17,32 : 1,4.

⑨1p 6). $\left\{30 \cdot (1 - 0,6)^2 - \left[3,2 + 0,011 : \left(\frac{1}{10}\right)^2\right] - 3 \cdot 0,5^3\right\} : 0,5 =$.....

⑩1p 7). Să se calculeze $x^2 - 69$ unde $x = \left\{0,37 : \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{40} + \frac{1}{400}\right) + \left[1\frac{1}{2} + 0,(3)\right]\right\} \cdot 12 - 5^2$.

Testul 3

1). Să se efectueze : ⑤1p a). $5 - 3,17$ ⑤1p b). $8,19 + 2,095$

⑦1p c). $5,4 : 0,18$. ⑨1p d). $\left(5,2 : 6\frac{2}{4} + 1\right)^2 : 0,9$

⑦1p 2). Ordonaţi crescător : $\frac{7}{2}; 3\frac{3}{5}; 3,4$.

⑨1p 3). Dați exemplu de $a \in Q$ care îndeplinește condiția $\frac{3}{11} < a < \frac{4}{11}$.

⑩1p4). Să se determine $\overline{ab}$ par, cu $a < b$, dacă $40\left(\overline{a,b} + \overline{b,a}\right)$ este pătrat perfect.

Media aritmetică ponderată

**

1). Să se calculeze media aritmetică ponderată pentru :
a). 3 și 5 cu ponderile 2 și 8 b). 3,4 și 0,5 cu ponderile 1 și 7 c). 0,8; 5,6 și 4 cu ponderile 3; 4 și 0,5

2). Să se calculeze media la matematică în următoarele cazuri :
a). note oral : 10; 9; 9; 7 și 8 în teză b). note oral : 8; 6; 6; 5 și 7 în teză
c). note oral : 8; 7; 6 și 8 în teză d). note oral : 8; 9; 7 și 6 în teză

3). Să se calculeze media pe clasă :

nr. elevi	2	3	3	4	8	3	5
note	4	5	6	7	8	9	10

4). Dacă amestecăm 3 kg de bomboane de 15 lei/kg cu 5 kg bomboane de 20 lei/kg, cu ce preț trebuie vândut amestecul ?

5). Ce notă trebuie să mai ia un elev care are notele 4; 5; 6; 7 și 7 în teză, dacă vrea să obțină media 7 ?

6). Un elev are notele 7, 7, 5 și nota la teză 6. Ce notă îi mai trebuie pentru a obține media 6,75 ?

7). Un automobil a mers 2 ore cu 50 km/h și 4 ore cu 60 km/h. Cu ce viteză medie a mers automobilul ?

8). Un copil a cumpărat 2 ciocolate cu 6000 lei bucata și o ciocolată cu 9000 lei. Cât a dat în medie pe ciocolată ?

9). Într-o clasă de 20 elevi, 5 au 1,30 m, 7 au 1,40 m și restul 1,35 m. Care este înălțimea medie ?

10). Un elev are de rezolvat patru exerciții.Un exercițiu l-a rezolvat în 5 minute, al doilea în 7 minute și două exerciții le-a rezolvat în câte 10 minute fiecare. Care a fost timpul mediu de rezolvare a unui exercițiu ?

11). Aflati două numere dacă primul este dublul celuilalt și media lor aritmetică ponderată cu ponderea 3 și 7 este 3,9.

12). Media aritmetică a numerelor 3, 4, x având ponderea x + 1, 4, 8 este 10. Să se afle x.

Ecuații

*

1). Fie $A=\left\{0; \frac{3}{5}; \frac{2}{3}; 3; 3\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$.Care din elementele mulțimii A verifică ecuațiile de mai jos

a). $\frac{2}{3}x + \frac{4}{5} = \frac{18}{15}$ b). $\frac{17}{3} - \frac{1}{2}x = 5\frac{4}{6}$ c). $\frac{4}{3} + x = 2$ d). $x - 2\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

e). $\left(x + \frac{2}{5}\right) \cdot \frac{10}{7} = 1\frac{6}{14}$ f). $\left(\frac{2}{7}x - \frac{10}{14}\right) : \frac{1}{20} = 2 + 3\frac{5}{7}$

g). $\left(x-\frac{2}{3}\right):\frac{1}{9}=\frac{12}{5}+\frac{6}{10}$ h). $\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot x=\frac{1}{32}$

2). Să se rezolve în Q :

a). $x+\frac{1}{4}=2$ b). $1\frac{3}{8}+x=2$ c). $x-\frac{4}{9}=\frac{1}{3}$ d). $\frac{5}{6}-x=\frac{1}{2}$ e). $3\frac{1}{4}-x=2$

f). $x-4=\frac{3}{8}$ g). $x+\frac{3}{2}=2$ h). $4x=\frac{1}{6}$ i). $5x=1$ j). $3x=2$

k). $\frac{2}{3}x=4$ l). $\frac{5}{6}x=25$ m). $1\frac{1}{2}x=3$ n). $\frac{5}{8}x=\frac{15}{4}$ o). $2\frac{1}{2}x=\frac{25}{14}$

**

3). Să se rezolve în Q:

a). $x:\frac{1}{4}=3$ b). $3\frac{2}{3}:x=\frac{1}{3}$ c). $\frac{5}{6}:x=8\frac{1}{3}$

d). $\frac{3x}{5}:\frac{2}{9}=18$ e). $9x-\frac{4}{5}=\frac{1}{2}$ f). $\frac{5}{4}x+\frac{2}{3}=\frac{11}{12}$

g). $2x+\frac{4}{3}=\frac{21}{2}$ h). $\frac{3}{4}x+\frac{5}{6}=\frac{17}{2}$ i). $x+\frac{7}{2}=\frac{3}{4}+3\frac{1}{6}$

j). $8\frac{1}{6}-x=2\frac{1}{8}\cdot3\frac{4}{17}$ k). $2\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}=\left(\frac{7}{4}-1\frac{1}{2}\right)^2$ l). $8:x=5\frac{1}{3}$

m). $\left(\frac{4}{5}-\frac{2}{3}\right)\cdot x:3=\frac{10}{1}$ n). $4x+3\frac{1}{2}=4\frac{1}{3}$ o). $\frac{7}{2}\cdot\left(2x+\frac{2}{7}\right)=\left(1\frac{1}{2}\right)^2$

4). Rezolvaţi :

a). $\frac{5}{4}x+\frac{1}{3}x=\frac{1}{12}$ b). $\frac{3}{5}x-\frac{1}{15}x=4$ c). $4\frac{1}{2}+3x=\frac{29}{6}$

d). $\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}=4\frac{1}{3}$ e). $\frac{5}{6}x+x=\frac{3}{9}$ f). $\frac{1}{6}x+\frac{2}{3}x-\frac{1}{12}x=\left(1-\frac{1}{2}:2\right)^2$

g). $1\frac{3}{5}x+\frac{1}{10}x+12=12$ h). $\frac{7}{10}x-\frac{3}{5}x+\frac{2}{3}x=\frac{1}{1\frac{7}{23}}$

5). Să se rezolve în Q :

a). $x-\frac{4}{3}=\frac{5}{6}x$ b). $2x=3\cdot\left(\frac{x}{6}+7\right)$ c). $\frac{1}{3}=1+\frac{2}{3}x+2$ d). $\frac{4}{3}x+1\frac{1}{2}x-2\frac{1}{6}x=2,(6)$

***

6). Să se rezolve în Q:

a). $\frac{5}{6}\left(x+\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{2}x=4\frac{1}{3}$ b). $\left(3x-\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{1}{6}+x=\frac{5}{6}$ c). $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4}{5}x+1\right)+\frac{1}{10}x=\frac{1}{2}$

d). $\left(3x-2\frac{1}{2}x\right)\cdot\frac{4}{5}+\frac{3}{4}=\frac{4}{5}$ e). $x-\frac{2}{3}x+\frac{5}{6}=2\frac{1}{4}$ f). $1\frac{1}{3}=x+\frac{2}{9}x+\frac{1}{9}$ g).

$\left(\frac{1}{5}\right)^0+\frac{1}{2}:2=\left(1\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x\right)\cdot\frac{8}{19}+\frac{1}{3}x$ h). $\left(2x-\frac{3}{5}x\right)\cdot\frac{2}{7}-\left(x-\frac{2}{3}x\right)=\frac{1}{5}$

i). $1\frac{1}{4}-\left(3x+\frac{4}{5}x\right)\cdot\frac{10}{19}=\left(2\frac{1}{2}+3\right)^0$ j). $1\frac{1}{5}+\frac{1}{2}=2\frac{2}{5}\left(x+\frac{1}{3}x\right)+\frac{1}{2}$

7). Să se rezolve în Q:

a). $2x+\frac{3}{4}=x+5\frac{6}{8}$ b). $\frac{5}{8}+\frac{3}{4}x+2x=x+10$ c). $\frac{1}{2}x+3\frac{1}{4}=\frac{1}{4}x+5$

d). $\frac{4}{5}\left(x+\frac{3}{2}\right)+2\frac{1}{2}=1\frac{2}{5}x+1$ e). $\frac{5}{8}x+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}x=\frac{1}{2}x+4$ f). $\frac{2}{5}x-\frac{1}{8}=x-\frac{3}{4}x$

g). $2\frac{1}{4}x+1\frac{2}{3}+\frac{4}{5}x=1\frac{3}{4}x+2$ h). $\frac{9}{5}x-\frac{8}{10}x+2\frac{1}{3}=1\frac{7}{9}x$ i). $2\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}=x+4$

j). $\frac{5}{7}\cdot\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}x\right)=\frac{2}{3}x+\frac{1}{12}$ k). $\frac{4}{5}x+1\frac{1}{2}=\frac{1}{10}x+19\frac{1}{2}$ l). $\frac{1}{3}x-3=\frac{1}{6}x$

m). $x-\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x\right)=\frac{1}{12}x+\frac{4}{6}$ n). $\frac{2}{3}x+\frac{13}{6}=x+1\frac{1}{4}x-1$ o). $\frac{2}{5}x+12=x$

p). $x-5=\frac{1}{19}\left(1\frac{2}{3}x+1\frac{1}{2}x\right)$ r). $3\frac{1}{2}x+1\frac{1}{3}x=x+\frac{1}{6}x$

Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuaţiilor

1). În dulapul cu jucării al Ioanei sunt 36 jucării din pluş. $\frac{1}{9}$ sunt ursuleţi, $\frac{2}{6}$ sunt şoricei, $\frac{1}{4}$ sunt pisicuţe, iar restul sunt răţuşte. Câte răţuşte din pluş are Ioana ?

2). La un concurs de matematică au participat 90 de elevi. $\frac{1}{15}$ din numărul total au luat premiul I; $\frac{1}{30}$ au luat premiul al II-lea, iar $\frac{1}{9}$ din cei rămaşi au luat premiul al III-lea. Câte premii s-au acordat ?

3). Într-un depozit sunt 900 kg de mere. În prima zi s-au vândut $\frac{2}{15}$ din întreaga cantitate, a doua zi $\frac{2}{10}$ din cantitatea rămasă. Câte kg de mere au rămas în depozit, dacă în a treia zi s-au vândut 135 kg mere ?

4). Cât grâu e necesar pentru a obţine 60 kg de făină, dacă ea reprezintă $\frac{4}{5}$ din grâul care s-a obţinut ?

5). Într-un butoi sunt 96 l de vin. Se scot 3/4 din cantitatea de vin şi apoi 4/6 din cantitatea rămasă. Câţi litri de vin au mai rămas în butoi ?

6). Un turist străbate 210 km. Cu trenul străbate 3/7 din distanţă, cu autobuzul 7/10 din distanţa rămasă. Câţi kilometri a străbătut cu bicicleta ?

7). Să se afle un număr dacă :

a). $\frac{2}{5}$ din el fac 8 ? b). $\frac{1}{6}$ din el fac $1\frac{5}{12}$? c). $2\frac{3}{5}$ din el fac $\frac{39}{15}$?

8). Aflaţi x dacă :

a). $\frac{2}{3}$ din x este 16 b). $\frac{5}{6}$ din x este 25 c). $\frac{4}{3}$ din x este 20

9). Să se afle x ştiind că :

a). $\frac{4}{9}$ din x reprezintă $\frac{1}{2}$ din 54 b). $2\frac{1}{7}$ din x reprezintă $\frac{2}{5}$ din 50

c). $\frac{5}{6}$ din $\frac{8}{15}$ din x este 20 d). $1\frac{3}{7}$ din $\frac{14}{25}$ din x este cel mai mic număr prim impar

10). a) Să se afle un număr raţional ştiind că adunat cu $3\frac{1}{8}$ dă 5.

b). Să se afle un număr raţional ştiind că dacă scădem $1\frac{3}{5}$ din el obţinem $3\frac{1}{8}$.

c). Să se afle un număr raţional dacă triplul său este $8\frac{1}{9}$.

d). Să se afle un număr raţional dacă o treime din el este $\frac{1}{6}$.

e). Să se afle un număr raţional dacă adunat cu $1\frac{3}{4}$ obţinem triplul său.

11). a). Să se afle două numere raţionale a căror sumă este $30\frac{1}{2}$ şi unul este cu $\frac{3}{8}$ mai mare decât celălalt.

b). Câţi bani a avut un elev dacă cheltuieşte $2000\frac{1}{2}$ lei, iar mama îi dă cât a avut iniţial şi acum are 10000 lei ?

12). Ce sumă a avut o persoană dacă a cheltuit 1673 lei adică $\frac{7}{8}$ din suma lui ?

13). Într-o clasă $\frac{2}{3}$ din numărul elevilor sunt fete. Câţi elevi sunt dacă sunt 24 de fete ?

14). Un elev a rezolvat 12 exerciţii ceea ce reprezintă $\frac{6}{7}$ din temă. Câte exerciţii are tema ?

15). Un tractorist a arat 324 ha ceea ce reprezintă $\frac{4}{11}$ din teren. Câte ha are terenul ?

16). Smântâna reprezintă $\frac{2}{9}$ din cantitatea de lapte. Cât lapte e necesar pentru a prepara 4 kg smântână ?

17). Făina reprezintă $\frac{11}{12}$ din cantitatea de grâu. Ce cantitate de grâu e necesară pentru a obţine 33 kg făină ?

18). Un om a cheltuit $\frac{2}{3}$ din banii săi şi i-au mai rămas 700 lei. Câţi bani a avut şi câţi bani a cheltuit ?

19). Un drumeţ a mers 12 km şi i-au mai rămas $\frac{4}{7}$ din drum. Câţi km are drumul şi câţi km i-au mai rămas ?

20). Într-o clasă sunt $\frac{3}{5}$ din elevi băieţi şi 12 fete. Câţi elevi sunt şi câţi băieţi ?

21). Un elev a rezolvat 15 exerciţii şi i-au mai rămas $\frac{1}{6}$ din temă. Câte exerciţii a avut tema şi câte exerciţii i-au mai rămas ?

22). Într-o clasă $\frac{1}{11}$ din elevi sunt corijenţi şi 30 elevi sunt promovaţi. Câţi elevi are clasa şi câţi sunt corijenţi ?

23). Un elev a cumpărat un caiet pe care a dat $\frac{2}{15}$ din banii săi şi un stilou care a costat $\frac{4}{9}$ din bani. Ştiind că i-au mai rămas 1900 lei, aflaţi câţi bani a avut elevul.

24). Un teren este cultivat astfel : $\frac{3}{7}$ din el cu grâu, $\frac{2}{5}$ din teren cu porumb şi restul de 720 ha cu floarea soarelui. câte ha are terenul ?

25). Dintr-un depozit s-a scos astfel : în prima zi $\frac{1}{5}$ din cantitate, a doua zi $\frac{1}{4}$ din rest şi au mai rămas 1800 kg. Ce cantitate era la început în depozit ?

26). Doi fraţi au împreună 21 de ani. Vârsta unuia este $\frac{3}{4}$ din vârsta celuilalt. Să se afle vârsta fiecăruia.

27). Diferenţa a două numere naturale este 24. Să se afle numerele ştiind că unul este $\frac{5}{6}$ din celălalt.

28). Suma dintre $\frac{1}{2}$ şi $\frac{1}{6}$ ale aceluiaşi număr este 420. Să se afle numărul.

29). Într-un atelier s-au executat doar $\frac{2}{7}$ din 1960 de paltoane câte trebuiau să fie executate. Câte paltoane au mai rămas de executat ?

30). Un grup de turişti au parcurs în prima zi $\frac{2}{9}$ din tot drumul pe care îl aveau de parcurs, a doua zi 270 km ceea ce reprezintă $\frac{3}{5}$ din tot drumul, iar a treia zi restul. Câţi km au parcurs în ultima zi ?

31). Într-o clasă de 36 de elevi, $\frac{2}{3}$ din ei merg la muzeu şi $\frac{3}{4}$ din ei merg la teatru. Care este cel mai mic şi care este cel mai mare număr de elevi, care ar fi putut merge şi la muzeu şi la teatru ?

32). Fie cel mai mic număr natural de ordinul sutelor divizibil cu 6. Aflaţi suma dintre $\frac{1}{2}$ şi $\frac{3}{17}$ ale acelui număr.

33). Un drumeţ a mers $\frac{3}{7}$ din drum şi mai are 10 km până ajunge la jumătatea drumului. Câţi km are drumul ?

34). Un om a cheltuit $\frac{4}{9}$ din banii săi şi dacă mai cheltuieşte 1500 lei îi mai rămâne jumătate din sumă. Ce sumă a avut la început ?

35). Un muncitor a făcut $\frac{4}{10}$ din normă şi dacă mai face 112 piese îi mai rămâne de făcut $\frac{1}{3}$ din normă. Câte piese are norma ?

36).Un ţăran a arat $\frac{3}{5}$ din teren în prima zi, $\frac{1}{3}$ din rest a doua zi şi i-au mai rămas de arat 456 ha. Câte ha are terenul ?

37). a). Să se afle un număr ştiind că $\frac{3}{10}$ din el este cu 20 mai mare decât $\frac{1}{5}$ din el. b). Un turist a parcurs în 2 zile distanţa dintre două oraşe astfel : în prima zi $\frac{1}{2}$ din tot drumul şi încă 24 km şi a doua zi restul adică o distanţă de 3 ori mai mică decât în prima zi. Ce lungime are drumul ?

38). Dintr-un bidon cu lapte s-au consumat 16 l care reprezintă 4/5 din întreaga cantitate. Câţi litri de lapte au fost la început în bidon ?

39). Cătălina are 6 ani, adică 2/10 din vârsta mamei, iar mama are 2/4 din câţi ani are bunica. Câţi ani va avea bunica peste 10 ani ? Dar mama ?

40). Un călător vrea să parcurgă un drum în 9 zile, mergând la fel zilnic. Ce fracţie din drum a făcut după 5 zile ?

41). Un elev a făcut $\frac{3}{7}$ din tema de vacanţă şi i-au mai rămas 40 de exerciţii. Câte exerciţii are tema ?

Testul 1

1). Efectuaţi :

⑤1p a). $\frac{3}{4}+2,(3)=$ ⑤1p b). $\frac{5}{8}\cdot 1\frac{1}{3}+0,5=$ ⑦1p c). $\frac{7}{3}-0,4\cdot\left(\frac{14}{48}-\frac{15}{54}\right):0,1=$

2). Dacă :⑦1p a). $\frac{x}{2}+3,5=4$ atunci x = ... ⑤1p b). $\frac{17}{3}-x=0,(3)$ atunci x = ...

⑦1p c). $2x+\frac{1}{2}=4$ atunci x = ... ⑨1p d). $\frac{x+1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{x}{4}$ atunci x = ...

⑩1p 3). Dacă $n\in N$ şi $n<\frac{15}{4}<n+1 \Rightarrow n=$ ....

⑨1p 4). Ordonaţi crescător : $\frac{5}{8};\frac{3}{4};0,(6);\frac{7}{10}$.

Testul 2

⑤2p 1). Rezultatul calculului $\frac{2}{5}+\frac{1}{10}-\frac{1}{4}$ este ....

2). Să se afle x dacă : ⑤1p a). $x+0,15=2$ ⑤1p b). $x:0,1=2$

⑨1p c). $\frac{x+1}{3}+\frac{x}{2}=1\frac{1}{6}-x$

⑦1p 3). Valoarea de adevăr a propoziţiei : „Numărul $\left(1\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\right)^2\cdot(0,5)^2$ este număr prim" este ....

⑦1p 4). Dacă $\frac{2}{3}x+1\frac{2}{3}=5\frac{1}{6}$, $x\in Q$, atunci x = ...

⑨1p 5). Să se compare numerele : $x=\left[\left(\frac{3}{4}\right)^2-0,25\right]\cdot\frac{5}{6}$ şi $y=0,75+0,5-\frac{1}{12}+0,8(3)$

⑩1p 6). Fie $a=\frac{2^{4n}\cdot5^{2n+2}+800^n}{25^{n+1}+50^n}$. Să se arate că numărul a este pătrat perfect, pentru orice $n\in N$.

Capitolul III

RAPOARTE ŞI PROPORŢII

Raport

NOŢIUNI DE BAZĂ

- raportul a două numere a şi b se notează $\frac{a}{b}$;
- numerele a şi b sunt termenii raportului;
- prin valoarea raportului $\frac{a}{b}$ se înţelege rezultatul împărţirii lui a la b;
- raportul măsurilor a două mărimi exprimate prin aceeaşi unitate de măsură este raportul numerelor prin care se exprimă cele două mărimi.

EXERCIŢII

**

1). Să se afle valorile rapoartelor numerelor :

a). 3 şi 5 b). 10 şi 4 c). 15 şi 2 d). 18 şi 36

e). 0,1 şi 0,5 f). 0,02 şi 0,4 g). $0,3^2$ şi $0,2^2$ h). $\frac{1}{2}$ şi 2

i). $\frac{3}{9}$ şi $\left(1\frac{1}{2}\right)^2$ j). 0,(5) şi 0,2 k). $\left(\frac{1}{8}\right)^2$ şi $\left(\frac{1}{6}\right)^2$ l). $1\frac{1}{2}$ şi $2\frac{3}{4}$

2). Să se afle primul termen al raportului dacă :

a). valoarea raportului este 5 şi al doilea termen este 3;

b). valoarea raportului este 1,2 şi al doilea termen este $1\frac{2}{3}$;

c). valoarea raportului este 0,4 şi al doilea termen este dat de expresia : $E=\left(\frac{1}{2}+0,(3):\frac{1}{6}\right)^2\cdot 1\frac{3}{5}$

3). Să se afle al doilea termen al raportului, dacă primul termen este :

a). 20,4 şi valoarea raportului este 5,1;

b). c.m.m.m.c. al numerelor 6, 8 si 15 iar valoarea raportului este 0,(15);

c). cel mai mare număr care divide numerele 24, 36 si 60 iar valoarea raportului este 0,3.

4). Se consideră un dreptunghi cu lăţimea de 6 cm şi valoarea raportului dintre lungime şi lăţime este 2,5. Să se afle perimetrul şi aria lui.

5). Un dreptunghi are lungimea de 14 cm şi lăţimea cu 4 cm mai mică decât lungimea. Aflaţi :

a). raportul dintre lungime şi lăţime;

b). raportul dintre lăţime şi lungime;

c). raportul dintre perimetru şi lungime;

d). cunoaşteţi şi raportul dintre perimetru şi suma celor două dimensiuni fără a efectua calculele ?

6). Un dreptunghi are lungimea de 12 m iar lăţimea este o treime din lungime şi un alt dreptunghi are lăţimea de 2,4 dam iar lungimea este $1\frac{1}{3}$ din lăţime. Să se afle :

a). raportul dintre lungimea şi lăţimea primului dreptunghi;

b). raportul dintre lungimea şi lăţimea celui de-al doilea dreptunghi;

c). de câte ori este mai mare aria celui de-al doilea dreptunghi faţă de aria primului;

d). raportul perimetrelor celor două dreptunghiuri.

7). Să se afle valoarea raportului dintre numărul natural de forma $\overline{x10x}$ divizibil cu 6 şi numărul natural de forma $\overline{2yy}$ divizibil cu 36.

8). a). Dacă a este egal cu o cincime din b, să se afle raportul a/b;

b). Dacă a este de 4 ori mai mare decât b, aflaţi rapoartele a/b şi b/a;

c). Dacă a este de 3 ori mai mic decât b, aflaţi rapoartele a/b şi b/a.

9). a). Dacă raportul dintre a şi b este 3/8, care va fi raportul dintre b şi a ?
b). Dacă a/b = 1/4, aflaţi b/a;
c). Dacă a/b = 2, aflaţi b/a.
10). Dacă raportul laturilor a două pătrate este 3/5, care este raportul perimetrelor ? Dar raportul ariilor ?
11). Dacă raportul ariilor a două pătrate este 1/4, aflaţi raportul laturilor.
12). Dacă se ştie a/b = 2/3 şi b/c = 6/7, aflaţi rapoartele a/c şi c/a.
13). Dacă a/b = 3/5 şi a/c = 2/3, aflaţi b/c.
14). Să se afle valoarea raportului ariilor a două dreptunghiuri care au raportul lungimilor 2/5 iar raportul lăţimilor 3/4.
15). Care este raportul lungimilor a două dreptunghiuri, dacă raportul ariilor lor este 16/7 iar raportul lăţimilor este 4/3 ?
16). Raportul numerelor a şi b este 3/5. Cu cât va fi egală valoarea raporturilor a/b, dacă numărul a se măreşte de 0,8 ori, iar numărul b se micşorează de 5 ori ?

Proporţie. Proprietatea fundamentală a proporţiei

NOŢIUNI DE BAZĂ
- proporţia este o egalitate a două rapoarte;
- orice proporţie are patru termeni : $\frac{\text{extrem}}{\text{mez}} = \frac{\text{mez}}{\text{extrem}}$
- în orice proporţie produsul extremilor este egal cu produsul mezilor;

EXERCIŢII

*

1). Verificaţi dacă urmatoarele rapoarte formează proporţii :
a). $\frac{2}{5} = \frac{8}{20}$ b). $\frac{7}{3,5} = \frac{14}{7}$ c). $\frac{1}{3} = \frac{2}{5}$ d). $\frac{4}{18} = \frac{2}{9}$ e). $\frac{6}{0,1} = \frac{0,6}{1}$
f). $\frac{\frac{1}{3}}{2} = \frac{2}{6}$ g). $\frac{\frac{2}{5}}{10} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{25}{2}}$ h). $\frac{2\frac{3}{6}}{8\frac{1}{2}} = \frac{5}{17}$ i). $\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} : 2}{6} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$

2). Să se verifice care dintre rapoartele de mai jos formează proporţii cu raportul 3/5 :
a). $\frac{2}{4}$ b). $\frac{6}{10}$ c). $\frac{7}{3}$ d). $\frac{21}{35}$ e). $\frac{0,2}{\frac{1}{3}}$ f). $\frac{2^4 - 4}{5^2 - 5}$

**

3). Folosiţi următoarele rapoarte pentru a forma proporţii : $\frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{4}{8}; \frac{6}{3}; \frac{9}{12}; \frac{3}{6}; \frac{4}{2}; \frac{0,12}{0,06}; \frac{0,25}{0,(3)}$
4). Să se formeze proporţii cu următoarele numere :
a). 2; 3; 4; 6 b). 3; 4; 6; 8 c). 4; 5; 12; 15 d). 2; 24; 6; 8 e). 2; 5; 6; 15
f). 4; 6; 8; 12 g). 3; 9; 16; 48 h). 4; 12; 12; 36 i). 0,12; 40; 0,6; 8 j). 0,7; 1/21; 1/9; 0,3
5). Ştiind că :
a). $2 \cdot x = 5 \cdot y$, aflaţi raportul x/y;
b). $(6 + 2^3) \cdot a = 7 \cdot b$, aflaţi raportul b/a;
c). $(1 - 3/4) \cdot x = 1/2^3 \cdot y$, aflaţi raportul x/y;
d). $0,3 \cdot a^2 = 30 \cdot b^2$, aflaţi rapoartele a^2/b^2, a/b.
6). Fie proporţia : a/18 = b/a. Ştiind că b este cel mai mic număr prim, să se afle a.
7). Fiind dată proporţia a/b = c/d, să se afle 5 ad, dacă b = 3 iar c este de 4 ori mai mare decat b.

8). Fiind dată proporţia $\frac{3}{a}=\frac{b}{9}$, aflaţi raportul $\frac{a\cdot b}{a\cdot b+3}$

9). Fiind dată proporţia $\frac{5}{a}=\frac{b}{12}$, simplificaţi fracţia, transformând-o în fracţie ireductibilă $\frac{a\cdot b}{90}$

10). Fiind dată proporţia $\frac{a}{4}=\frac{5}{b}$, simplificaţi fracţia, ransformând-o în fracţie ireductibilă $\frac{ab+4}{32}$

Aflarea unui termen necunoscut al unei proporţii

NOŢIUNI DE BAZĂ

- un extrem = $\frac{\text{produsul mezilor}}{\text{celalalt extrem}}$ - un mez = $\frac{\text{produsul extremilor}}{\text{celalalt mez}}$

EXERCIŢII

*

1). Să se afle x din proporţiile :

a). $\frac{4}{3}=\frac{x}{9}$ b). $\frac{2}{3}=\frac{10}{x}$ c). $\frac{4}{x}=8$ d). $\frac{2}{x}=\frac{10}{15}$ e). $\frac{x}{3}=5$

f). $\frac{3}{x}=2,4$ g). $\frac{x}{18}=\frac{4}{9}$ h). $2=\frac{9}{x}$ i). $\frac{0,(15)}{x}=2,5$

**

2). Să se afle x din proporţia :

a). $\frac{\frac{1}{3}}{2}=\frac{6}{x}$ b). $\frac{\frac{1}{0,6}}{0,2}=\frac{x}{0,6}$ c). $\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}:2}{x}=\frac{6}{7}$ d). $\frac{\frac{2}{5}}{x}=\frac{\frac{1}{4}}{10}$

e). $\frac{0,(3)}{0,0(5)}=\frac{x}{2\frac{1}{6}}$ f). $\frac{15:\frac{5}{3}}{2^3}=\frac{x}{\frac{1}{4}\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)}$ g). $\frac{1\frac{1}{2}}{x}=\frac{4}{0,2}$ h). $\frac{1,2}{0,(6)}=\frac{0,18}{x}$

3). Să se afle x din proporţiile :

a). $\frac{\frac{x}{2}}{3\frac{1}{3}}=\frac{1\frac{1}{2}}{9}$ b). $\frac{2x+\frac{3}{4}}{6}=\frac{5}{3+4\frac{1}{2}}$ c). $\frac{x+2}{5}=\frac{3+2^2}{7}$

d). $\frac{x+1}{6}=27$ e). $\frac{72}{240}=\frac{x+1}{10}$ f). $\frac{4x-7}{6}=\frac{8}{48}$ g). $\frac{3x-1}{15}=\frac{4}{12}$

h). $\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{5}{6}}=\frac{2+\frac{1}{2}}{3}$ i). $\frac{16}{2x+1}=\frac{48}{27}$ j). $\frac{24}{8}=\frac{15}{2x+3}$

4). Să se afle x :

a). $\frac{\frac{1}{5}+\frac{3}{10}}{\frac{1}{4}}=\frac{2^5:\left(2^2\right)^2+0,25}{\frac{3}{8}x}$ b). $\frac{\left(15^0+2\frac{1}{3}\right):\frac{5}{6}}{2^3:2-3}=\frac{4x}{12-10^7:10^6}$

c). $\dfrac{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right):\frac{1}{10}}{\frac{2}{3}x}=\dfrac{\frac{1}{3}}{2}$ d). $\dfrac{\frac{1}{7}-\frac{1}{14}+\frac{3}{28}}{\frac{5}{8}x}=\dfrac{1\frac{2}{3}}{\left(1\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)}$ e). $\dfrac{\frac{1}{12}-\frac{1}{36}}{\left(2^3\right)^5:2^{13}}=\dfrac{\frac{1}{3}x}{\frac{1}{2}+0,5}$

***

5). a). Să se afle x din : $\dfrac{\overline{1a}}{x}=\dfrac{4^2-6}{15}$, ştiind că $\overline{1a}$ se divide cu 9.

b). Să se afle x din : $\dfrac{x}{\overline{2a}}=\dfrac{6^2-3^0}{56}$, ştiind că $\overline{2a}$ se divide cu 6.

c). Să se afle x din : $\dfrac{a}{240}=\dfrac{x}{8^2+8^0}$, a fiind cel mai mare număr de două cifre divizibil cu 6.

d). Să se afle x din : $\dfrac{x}{a}=\dfrac{0,13(2)}{119}$, a fiind cel mai mare număr de trei cifre divizibil cu 15.

e). Să se afle x din : $\dfrac{a}{x}=\dfrac{63}{\overline{4b}}$, a fiind cel mai mare număr prim de o cifra şi $\overline{4b}$ divizibil cu 9.

6). Să se afle x din proporţiile :

a). $\dfrac{\left(\frac{4}{7}-\frac{1}{28}\right):3}{2x}=\dfrac{2^{75}+2^{75}+2^{75}}{3\cdot 2^{78}}$ b). $\dfrac{2^{80}+2^{80}}{2^{79}+2^{79}}=\dfrac{x}{6\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)}$

c). $\dfrac{5\cdot 9^{73}+5\cdot 9^{73}}{10\cdot 9^{71}}=\dfrac{9x}{15}$ d). $\dfrac{3x}{\frac{4}{3}+\frac{1}{6}}=\dfrac{\left(2^{15}\cdot 3^{25}\right)^{10}:9^{125}}{\left(2^7\right)^{15}\cdot 2^{40}\cdot 8}$

Proporţii derivate

NOŢIUNI DE BAZĂ

1). $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\rightarrow\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$ 2). $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\rightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ 3). $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\rightarrow\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$

4). $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\rightarrow\frac{af}{bf}=\frac{c}{d}$ 5). $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\rightarrow\frac{a:f}{b:f}=\frac{c}{d}$ 6). $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\rightarrow\frac{a\cdot f}{b}=\frac{c\cdot f}{d}$

7). $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\rightarrow\frac{a:f}{b}=\frac{c:f}{d}$ 8). $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\rightarrow\frac{a}{b\cdot f}=\frac{c}{d\cdot f}$ 9). $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\rightarrow\frac{a}{b:f}=\frac{c}{d:f}$

10). $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\rightarrow\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ 11). $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\rightarrow\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ 12). $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\rightarrow\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$

13). $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\rightarrow\frac{a}{b-a}=\frac{c}{d-c}$ 14). $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\rightarrow\frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+d}$ 15). $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\rightarrow\frac{a}{b}=\frac{a-c}{b-d}$

EXERCIŢII

*

1). a). Să se scrie proporţiile derivate cu aceiaşi termeni ce se obţin din proporţia : $\dfrac{2}{5}=\dfrac{14}{35}$

b). Să se scrie 8 proporţii derivate cu termeni schimbaţi ce se obţin din proporţia : $\dfrac{20}{48}=\dfrac{60}{144}$.

**

2). Ştiind că :

a). $\dfrac{x}{y}=\dfrac{2}{3}$, aflaţi $\dfrac{2x}{2x+5y}$;   b). $\dfrac{x}{y}=\dfrac{4}{5}$, aflaţi $\dfrac{3x+2y}{2y}$;   c). $\dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{2}$, aflaţi $\dfrac{4x-5y}{5y}$

d). $\frac{x}{y}=\frac{2}{11}$, aflaţi $\frac{5y}{3x+5y}$; e). $\frac{x}{y}=\frac{2}{7}$, aflaţi $\frac{5x}{3y-5x}$; f). $\frac{x}{y}=\frac{1}{3}$, aflaţi $\frac{2y-4x}{4x}$

3). Dacă :

a). $\frac{2x+4y}{4y}=\frac{14}{8}$, aflaţi $\frac{x}{y}$; b). $\frac{7x}{8y-7x}=\frac{7}{9}$, aflaţi $\frac{y}{x}$; c). $\frac{2x+3y}{2x+4y}=\frac{13}{16}$, aflaţi $\frac{x}{y}$;

d). $\frac{5x+3y}{2x+3y}=\frac{58}{34}$, aflaţi $\frac{y}{x}$; e). $\frac{7x+2y}{4x+7y}=\frac{11}{18}$, aflaţi $\frac{x}{y}$.

4). Folosind proporţiile derivate, să se afle x din proporţiile :

a). $\frac{x+1}{x}=\frac{6}{5}$ b). $\frac{4x+2}{15}=\frac{4x}{14}$ c). $\frac{2x}{10}=\frac{3x+1}{16}$ d). $\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{8x}{10x+5}$

5). Suma a două numere este 64 iar raportul lor este 7/9. Să se afle numerele.

6). Să se afle două numere dacă diferenţa lor este 18 şi raportul 2/5.

7). Numărul a este cu 24 mai mare decât b, iar valoarea raportului a/b este 2,(3). Să se afle cele două numere.

8). Perimetrul unui dreptunghi este 30 cm, iar raportul dimensiunilor lui este 2/3. Să se afle aria lui.

9). Un dreptunghi are perimetrul 42 cm si lungimea este 5/2 din lăţime. Să se afle : a). raportul dintre lăţime şi lungime; b). aria lui.

10). Se dau trei numere. Al doilea este cu 15 mai mic decât al treilea, iar raportul dintre al doilea şi al treilea este 8/13. Să se afle al doilea şi al treilea număr. Dacă primul număr este de 4 ori mai mic decât al doilea, să se afle raportul dintre al treilea şi primul.

11). a). Dacă 6 x = 5 y, aflaţi y/x; b). Dacă diferenţa numerelor de la punctul a). este 26, aflaţi numerele.

12). Să se afle a şi b ştiind că a/b = 2/3 şi 2a + b = 28.

13). Raportul a două numere este 1/9. Care este primul număr dacă : a). suma lor este 30; b). al doilea număr este 27; c). primul număr este cu 24 mai mic decât al doilea.

14). Diferenţa dintre numărul fetelor şi numărul băieţilor dintr-o clasă este 5. Să se afle câţi băieţi sunt în clasă dacă raportul lor este 3/7 : 8/14.

15). Suma a două fracţii ireductibile care au acelaşi numitor este 10/11. Să se afle cele două fracţii dacă raportul numărătorilor este 3/2.

Procente
Aflarea a p% dintr-un număr dat

NOŢIUNI DE BAZĂ

- prin notaţia p% se înţelege p/100
- pentru aflarea a p% dintr-un număr dat se efectueaza p/100 din numărul respectiv adică p/100 înmulţit cu numărul dat.

EXERCIŢII ŞI PROBLEME

*

1). Să se calculeze :

a). 15% din 350 b). 65% din 39 c). 12% din 75

d). 35% din 1200 e). 67% din 300

2). Prin sortare se pierde 16% din cantitatea care a fost sortată. Ce cantitate rămâne după sortare, dacă cantitatea iniţială a fost de 300 kg ?

3). Un elev a rezolvat 5% din tema de 20 exerciţii. Câte exerciţii a rezolvat şi câte exerciţii mai are de rezolvat ?

**

4). Calculaţi : a). 0,5% din 1200; b). 0,(6)% din 90; c). 1,(2)% din 7200.

5). Prin măcinarea grâului se pierde 5%. Cât la sută reprezintă făina; câte kg de făină se vor obţine din 300 kg de grâu ?

6). Untul reprezintă 7% din lapte. Cât unt se va obţine din 50 l lapte ?

7). Un drumeţ care are de mers 12,96 km, a mers în prima oră 25% din drum, a doua oră a parcurs 75% din rest. Câţi km mai are de mers ?

8). Ce dobândă va primi o persoană într-un an pentru 5000000 lei, dacă îi depune cu 37% dobândă ? Ce sumă va avea peste doi ani, în bancă, dacă nu retrage banii ?

9). Să se afle aria unui dreptunghi cu perimetrul de 60 cm şi lăţimea de 15% din perimetru.

10). Mihai avea 18400 lei. L-a împrumutat pe Dan cu 45% din suma, rămânând astfel cu o sumă de două ori mai mare decât avea Dan la început. Ce sumă de bani a avut Dan ?

11). Un kg de cartofi costă 15000 lei. Cât va costa după o scumpire cu 15% ?

12). Un muncitor are o normă de 145 piese. Câte piese a realizat în plus, dacă a făcut 120% din normă ?

13). Un elev are o temă de 10 exerciţii. Dacă nu a ştiut să rezolve 10% din temă, câte exerciţii a rezolvat ?

14). Dan avea 120000 lei şi a cheltuit 75% din ei astfel : cu 10% din banii cheltuiţi a cumpărat un pix, iar cu 35% din banii cheltuiţi a cumpărat o culegere. Câţi bani i-au ramas din cei de cheltuială ?

15). Să se compare :

a). 5% din 20% din x cu 8% din 15% din x;

b). 20% din 40% din y cu 25% din 30% din y;

c). 25% din a cu 80% din b, dacă a este de 3 ori mai mic decât b;

d). 15% din a cu 40% din b, dacă b, este 30% din a;

e). 64% din a cu 70% din b, dacă b este 30% din triplul lui a.

Aflarea unui număr când se cunoaşte p% din el

NOŢIUNI DE BAZĂ

- întrucât există un număr necunoscut îl vom nota cu x, obţinând p/100 din x = a, a fiind dat, rezultă x = a : p/100

EXERCIŢII ŞI PROBLEME

*

1). a). 30% din ce număr reprezintă 27 ?

b). Să se afle un număr ştiind că 12% din el reprezintă 3,6.

c). Dacă 0,5% dintr-un număr reprezintă 15, să se afle numărul.

2). 60% dintr-o sumă reprezintă 105000 lei. Să se afle suma.

3). Un elev a rezolvat 28% din teme, adică 14 exerciţii. Câte exerciţii şi cât la sută din teme mai are de rezolvat ?

4). Dintr-o clasă de elevi, 6 elevi merg într-o tabără, ceea ce reprezintă 20%. Câţi elevi nu merg în tabără ?

5). 12,5% din numărul de elevi ai unei clase merg la olimpiada de matematică. Câţi elevi sunt în clasă, dacă au mers 4 elevi la olimpiadă ?

**

6). Să se afle media aritmetică a două numere dacă un număr este 30 şi reprezintă 75% din celălalt.

7). Dacă scădem 5 din 30% dintr-un număr natural, obţinem 5,2. Să se afle numărul.

8). Să se afle un număr natural dacă produsul dintre 25% din el şi 4% din el este egal cu 1.

9). Ce sumă a depus o persoană la bancă, cu dobânda de 30% pe an, dacă a primit după un an 1200000 lei dobândă ?

10). Ce sumă a depus o persoană la bancă, cu dobândă de 40% pe an, dacă are după un an 8400000 lei ?
11). Cât a costat un kg de roşii, dacă după scumpire cu 20% costă 42000 lei ?
12). După indexare de 6%, alocaţia pentru copii este de 450500 lei. Cât era înainte de indexare ?
13). Un elev a rezolvat 6 exerciţii şi mai are de rezolvat 60% din temă. Câte exerciţii are tema ?
14). Un drumeţ, după ce parcurge 25% din drum, observă că mai are de mers 60 km. Câţi km are drumul şi câţi km a mers ?
15). Pentru a împărţi cartofii în trei calităţi, se fac două sortări. După prima sortare mai rămân 70% din cantitate şi după a doua sortare mai rămân 50% din prima sortare.
a). Din 2000 kg cartofi, câte kg din fiecare calitate vor fi ?
b). Din ce cantitate de cartofi se vor alege 90 kg cartofi, calitatea a III-a ?
c). Din ce cantitate de cartofi se vor alege 70 kg cartofi, calitatea I ?
16). Numărul corigenţilor dintr-o clasă reprezintă 10% din numărul elevilor. 1/3 din numărul corigenţilor sunt corigenţi la matematică, restul fiind la limba română. Câţi elevi are clasa dacă sunt 2 corigenţi la limba română ?
17). Să se afle un număr ştiind că scoţând 20% din el obţinem 36.
18). Perimetrul unui dreptunghi este de 124 cm si latimea este 24% din lungime. Sa se afle aria.

***

19). Ce sumă a depus o persoană la bancă, cu dobândă de 18% pe an, dacă are după doi ani 69620000 lei ?
20). Ce sumă a depus un om la bancă, cu dobândă de 20% pe an, dacă dobânda pe doi ani e 16500000 lei ?

Aflarea raportului procentual

NOŢIUNI DE BAZĂ

- se numeşte raport procentual raportul $\frac{p}{100}$
- pentru a afla cât la sută reprezintă numărul a din numărul b, ne folosim de relaţia : $a = \frac{p}{100} \cdot b$ sau $\frac{a}{b} = \frac{p}{100} \rightarrow p = \frac{100 \cdot a}{b}$

EXERCIŢII ŞI PROBLEME

*

1). a). Cât la sută din 145 reprezintă 58 ?; b). Cât la sută din 16 reprezintă 20 ?
2). Un elev a rezolvat 48 de exerciţii din 60 care le avea ca temă. Cât la sută a rezolvat şi cât la sută mai are de rezolvat ?

**

3). Răzvan are 30 de nuci iar Andrei cu 5 mai puţine. Cu cât la sută are mai mult Răzvan decât Andrei ?
4). Un muncitor avea de efectuat 1250 piese şi a produs doar 800 piese. Cât la sută din normă mai are de efectuat ?
5). Un turist a parcurs un drum de 270 km, în trei zile astfel : în prima zi 81 km, în a doua zi 135 km şi în a treia zi restul. Cât la sută din drum a parcurs în fiecare zi ?
6). Care a fost dobânda anuală a unei bănci, dacă o persoană a depus 84000000 lei şi a scos după un an 88200000 lei ?
7). Un automobil trebuia să parcurgă distanţa de 400 km în 5 ore, iar el a întârziat 3 ore. Cu cât la sută s-a micşorat viteza automobilului ?
8). Dacă suma numerelor a şi b este 72 şi a este c.m.m.m.c. al numerelor 10 şi 8, să se afle : a). cât la sută din a reprezintă b; b). cât la sută din sumă reprezintă a ?

Probabilităţi

NOŢIUNI DE BAZĂ

- se numeşte probabilitatea realizării unui eveniment (rezultatul unei experienţe) raportul dintre numărul cazurilor favorabile realizării evenimentului şi numărul cazurilor posibile ale experienţei.
- probabilitatea unui eveniment A se notează cu P(A).

PROBLEME

*

1). Care este probabilitatea ca la aruncarea unui zar să obţinem :

a). faţa cu trei puncte

b). faţa cu un număr par de puncte

c). faţa cu un număr impar de puncte

d). faţa cu un număr prim de puncte

e). faţa cu un număr de puncte mai mic sau egal cu 4

f). faţa cu un număr de puncte mai mare sau egal cu 5

g). faţa cu un număr de puncte divizibil cu 3.

2). Într-o urnă sunt bile numerotate de la 1 la 30. Care este probabilitatea ca printr-o extragere să obţinem:

a). o bilă cu un număr divizor al lui 24;

b). o bilă cu un număr multiplu de 5;

c). o bilă cu un număr prim.

**

3). Care este probabilitatea ca la aruncarea cu două zaruri să se obţină :

a). feţe identice

b). feţe cu un număr par de puncte

c). feţe cu numere de puncte prime între ele

d). suma numerelor de pe cele două feţe să fie multiplu de 3

e) numărul de puncte de pe faţa unui zar să fie divizor al numărului de puncte de pe faţa celuilalt zar.

4). Într-o urnă sunt 2 bile albe, 3 bile negre, 1 bilă roşie şi 4 bile albastre.

a). Care este probabilitatea ca la o extragere să obţinem :

1). 1 bilă albă; 2). 1 bilă roşie; 3). 1 bilă neagră; 4). 1 bilă albastră;

b). Care este probabilitatea ca la două extrageri simultane să obţinem :

1). 2 bile de aceeaşi culoare; 2). una din bile să fie roşie;

c). Care este probabilitatea ca la 2 extrageri (prin punerea la loc a primei bile), să se obţină :

1). 2 bile de aceeaşi culoare; 2). una din bile să fie roşie; 3). una din bile să fie albastră.

5). Care este probabilitatea ca aruncând de 2 ori o moneda de 5000 lei să apară de fiecare dată faţa cu valoarea monedei ? Să apară măcar o dată faţa cu valoarea monedei ?

6). Într-o urnă sunt bile numerotate de la 1 la 5. Care este probabilitatea ca din 2 extrageri simultane să avem :

a). amândouă bilele numere pare; b). o bilă să fie număr par; c). suma numerelor să fie 7;

d). o bilă cu număr par, iar cealaltă cu un număr par; e). cele două bile să fie numere consecutive.

7). Într-un săculeţ sunt 30 de lozuri dintre care 18 sunt necâştigătoare.

a). Care este probabilitatea ca la o extragere să se obţină loz câştigător ?

b). Care este probabilitatea ca la două extrageri consecutive să se obţină două lozuri câştigătoare ?

Proporţionalitate directă

NOŢIUNI DE BAZĂ

- între două mulţimi finite de numere se stabileşte o proporţionalitate directă dacă se poate forma un şir de rapoarte egale, diferite de zero, astfel încât numărătorii rapoartelor să fie elementele primei mulţimi şi numitorii rapoartelor să fie elementele celeilalte mulţimi.
- între {x; y; z} şi {a; b; c} se stabileşte o proporţionalitate directă dacă $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$

EXERCIŢII

*

1). Verificaţi dacă între mulţimile de mai jos se stabileşte o proporţionalitate directă :

a). {5; 6; 8} şi {10; 12; 16} b). {24; 32; 12} şi {18; 24; 10}

c). {3/8; 4/5; 1/2} şi {1/4; 8/15; 1/3} d). {1,8; 3,6; 4,8; 5,4} şi {0,3; 0,6; 0,8; 0,9}

e). {3/2; 4/5; 1/4; 3/10} şi {3; 1,6; 0,5; 0,6}

**

2). Aflaţi x, y, z, t ∈ Q, în fiecare caz în parte, astfel încât între mulţimile de mai jos să se stabilească o proporţionalitate directă :

a). {15; 10; 30} şi {x; y; 18} b). {18; x; 36} şi {y; 16; 48}

c). {10; x; y; 30} şi {z; 16; 12; 24} d). {1/3; x; t} şi {5/9; 2/3; 5/7}

e). {0,(3); 0,(6); 0,1(6)} şi {0,5; z; t} f). {x; 54; y} şi {4; 6; 3}

g). {2x; 4y; 20} şi {3; 5; y} h). {25; x + 7; 30; 3y} şi {15; 6; 4z + 2; 45}

3). Cu cât este mai mare y decât x, dacă între mulţimile {x + 8; 28; y} şi {x; 12; 18}se stabileşte o proporţionalitate directă ?

4). Să se afle raportul dintre x şi y, dacă între mulţimile {x^2; 4; y} şi {2; x; 9} se stabileşte o proporţionalitate directă.

5). Să se afle media aritmetica a numerelor a şi b, dacă între mulţimile {a; 12; b} şi {2a + 4; 40; 20} se stabileşte o proporţionalitate directă.

6). Aflaţi aria unui dreptunghi cu perimetrul 286 cm, iar dimensiunile lui sunt direct proporţionale cu 105 şi 60.

7). Se dau a, b, c a căror sumă este 95. Ştiind că între mulţimile {a; b + 2; c + 3} şi {5; 12; 8} se stabileşte o proporţionalitate directă, să se afle cele trei numere.

8). Aflaţi numerele naturale a şi b ştiind că sunt direct proporţionale cu 2 şi 5 şi suma lor este mai mică decât 22.

9). Aflaţi numerele naturale a şi b ştiind că ele sunt direct proporţionale cu 4 şi 5 şi produsul lor este 500.

10). Aflaţi numerele naturale x, y, z ştiind că sunt direct proporţionale cu 2, 3 şi 5 produsul lor este 810.

11). Aflaţi perimetrul unui dreptunghi care are aria de 336 cm^2 şi dimensiunile direct proporţionale cu 3 şi 7.

***

12). Să se afle numerele a, b, c dacă primele două numere sunt direct proporţionale cu 7 şi 4, ultimele două numere sunt direct proporţionale cu 2 şi 9, iar a + 2b + 3c = 276.

13). Să se afle a şi b, numere naturale, ştiind că sunt direct proporţionale cu 2 şi 3 şi c.m.m.d.c. al lor este 4.

14). Să se afle a şi b, numere naturale, ştiind că sunt direct proporţionale cu 5 şi 6 şi c.m.m.m.c. al lor este 90.

15). Vârstele fiicei, mamei şi tatălui sunt direct proporţionale cu 2, 14 şi 15. Dacă tatăl are 30 de ani, câţi ani au mama şi fiica ?

16). Un copil a cheltuit pe o ciocolată, o pungă cu napolitane şi o pungă cu chips-uri sume direct proporţionale cu 11, 14 şi 16. Ştiind că o ciocolată a costat 2,2 lei, aflaţi cât au cotat celelalte cumpărături.

Proporţionalitate inversă

NOŢIUNI DE BAZĂ

- între două mulţimi finite de numere se stabileşte o proporţionalitate inversă, dacă se poate forma un şir de produse egale, diferite de zero, astfel încât mulţimea primilor factori ai produselor să fie una din mulţimi, iar mulţimea celorlalţi factori ai produselor să fie cealaltă mulţime.
- între {x; y; z} şi {a; b; c} se stabileşte o proporţionalitate inversă dacă : $x \cdot a = y \cdot b = z \cdot c$ sau : $\frac{x}{\frac{1}{a}} = \frac{y}{\frac{1}{b}} = \frac{z}{\frac{1}{c}}$

EXERCIŢII

*

1). Verificaţi dacă între următoarele mulţimi se stabileşte o proporţionalitate inversă :

a). {3; 6; 5} şi {20; 10; 12} b). {2; 3; 4; 6} şi {36; 24; 18; 12}

c). {5; 10; 15; 6} şi { 30; 15; 10; 25} d). {6; 12; 5; 30; 18} şi {30; 15; 36; 8; 10}

e). {2/3; 0,8; 1/8} şi {30; 25; 160}

**

2). Aflaţi a, b, c, în fiecare caz, astfel încât între mulţimile de mai jos să se stabilească o proporţionalitate inversă :

a). {a; 6} şi {3; 7} b). {a; b; 8} şi {4; 2; 3}

c). {a; b; 1} şi {0,1; 0,2; 0,7} d). {a; b; c; 4,5} şi {6; 3,6; 3; 2}

e). {5/6; 3/4; 6/7; 10/9} şi {4/5; a; b; c} f). {a; b; 112} şi {1/3; 1/5; 1/8}

g). {a; b; 1; c} şi {$(1/3)^2$; 1/15; 1/a : 1/12} h). {1,5; a; 2,5; b} şi {4; 3,75; c; 5}

i). {2,6; 4,(3); 1,(18)} şi {5; a; b}

3). Să se afle a, b, c ştiind că între mulţimile următoare s-a stabilit o proporţionalitate inversă :

a). {a + 3; b + 7; 5} şi {4; 2; 3} c). {a; b; c; 10} şi {1/24; 1/81; 1/(a + 4); 1/5}

b). {12; a; b – 6} şi {4; 3a; 2} d). { 2a; 2b – 4; c; 4} şi {0,5; 1/8; 0,25; 9/12}

4). Să se afle x, y, z dacă sunt invers proporţionale cu 2, 3, 4 şi suma lor este 13.

5). Aflaţi aria unui dreptunghi ale cărui dimensiuni sunt invers proporţionale cu 3 şi 4 iar perimetrul dreptunghiului este 70 cm.

***

6). Să se afle a şi b dacă sunt invers proporţionale cu 0,25 şi 0,(3), iar c.m.m.d.c. al lor este 6.

7). Aflaţi a şi b dacă sunt invers proporţionale cu 0,2 şi 0,25, iar c.m.m.m.c. al lor este 100.

8). Trei elevi se consultă după un test. Primul elev consideră că va lua nota 8, al doilea 6 iar al treilea 9. Dacă ultimul elev a făcut 8 greşeli, iar notele sunt invers proporţionale cu numărul de greşeli, aflaţi câte greşeli au elevii.

9). La o crescătorie piscicolă se află 5 bazine identice. Dacă numărul de robinete ce alimentează bazinele este invers proporţional cu timpul de umplere şi primul bazin are 4 robinete, al doilea 3 robinete, al treilea 6 robinete, al patrulea 2 robinete şi al cincilea 8 robinete, să se afle în cât timp se umplu bazinele, dacă al treilea se umple în 4 minute.

10). Un bazin cu 4 robinete se umple în 20 minute. În cât timp s-ar umple dacă am avea : a). 5 robinete; b). 8 robinete; c). 10 robinete; d). 2 robinete.

Regula de trei simplă

NOŢIUNI DE BAZĂ

- fiind date două mulţimi intre care este stabilită o proporţionalitate directă sau inversă, procedeul de aflare a unuia din elementele unei mulţimi se numeşte regula de trei simplă.

PROBLEME

**

1). Pentru fabricarea a 20 caiete se consuma 1,5 kg hârtie. Câte kg de hârtie sunt necesare pentru fabricarea a 125 caiete ? Dar pentru 160 caiete ?

2). Pentru efectuarea unei lucrări, 10 muncitori lucrează 4 ore. În câte ore vor termina lucrarea 4 muncitori ? De câţi muncitori este nevoie pentru a termina lucrarea în 8 ore ?
3). Dacă 8 muncitori produc 24 piese, căte piese produc 7 muncitori ?
4). 8 găini fac 136 ouă pe lună. Căte ouă fac 15 găini pe lună ?
5). 20 de iepuri mănâncă morcovii de pe o parcelă în 7 zile. În câte zile vor mânca morcovii de pe această parcelă 14 iepuri ?
6). Dacă 7 m de pânză costă 350000 lei, cât costă 6,5 m ?
7). Doi şoricei mănâncă o bucată de brânză în 12 zile (dacă îi lasă gospodina şi nu-i prinde pisica). Câţi şoricei vor termina bucata de brânză în 3 zile ? În câte zile vor mânca bucata 4 şoricei ?
8). 8 iepuri mănâncă pe zi 4,8 kg morcovi. Câţi iepuri vor mânca 5,4 kg de morcovi ?
9). O maşină care merge cu viteza de 60 km/h parcurge o distanţă în 5 ore. În câte ore va parcurge distanţa, dacă va merge cu viteza de 45 km/h ?
10). O maşină merge cu 3 l benzină, 24 km. Câţi km va merge cu 10 l ? De câţi litri de benzină este nevoie pentru a parcurge 96 km ?
11). Pentru vopsirea unui gard se folosesc 2,5 kg vopsea. Câte kg de vopsea se vor folosi pentru un gard de trei ori mai lung (având aceeaşi înălţime cu primul gard) ? Dar pentru un gard de două ori mai înalt (având aceeaşi lungime) ?
12). Pentru zugrăvirea unui perete sub formă de pătrat, se folosesc 3,6 kg var. Ce cantitate de var este necesară pentru zugrăvirea unui pătrat cu latura de două ori mai mare decât prima ? Dar cu latura de trei ori mai mică ?
13). Pentru a parcurge o distanţă de 120 km într-un anumit timp, o maşină trebuie să meargă cu viteza de 50 km/h. Cu ce viteză trebuie să meargă, pentru a parcurge 192 km în acelaşi interval de timp ?
14). Un tren parcurge 200 km în 3 ore. Câţi km va parcurge în 5 ore ? (Se presupune ca trenul se deplasează cu aceeaşi viteză).
15). Un autoturism parcurge distanţa dintre două oraşe în 6 ore, mergând cu viteza de 60 km/h. În cât timp va parcurge aceeaşi distanţă, dacă merge cu viteza de 90 km/h ? Cu ce viteză trebuie să meargă, dacă va parcurge distanţa în 5 ore ?
16). Din 7 kg ciuperci proaspete se obţin 0,5 kg ciuperci uscate. Câte kg de ciuperci uscate se vor obţine din 8,4 kg ciuperci proaspete ? Câte kg ciuperci proaspete sunt necesare pentru a se obţine 3 kg ciuperci uscate ?
17). Dintr-o bucată de material se pot croi 5 şorţuleţe folosind câte 1,5 m pentru un şorţuleţ. Câte şorţuleţe de 2,5 m se vor obţine din aceeaşi bucată de material ?
18). Din 10 kg de roşii se obţin 6 kg de suc de roşii. Câte kg de roşii sunt necesare pentru a obţine 12 kg de suc ? Câte kg de suc de roşii se vor obţine din 15 kg de roşii ?
19). Pe marginea unui drum se plantează 30 pomi fructiferi din 2 în 2 m. Câţi pomi sunt necesari pentru plantarea pe aceeaşi distanţă din 3 în 3 m ?

Împărţirea unui număr în părţi direct sau invers proporţionale cu mai multe numere date

NOŢIUNI DE BAZĂ

- cunoscând suma mai multor numere x, y, z direct sau invers proporţionale cu numerele a, b, c se pot afla primele numere din relaţiile : a). $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{x+y+z}{a+b+c}$; b). $\frac{x}{\frac{1}{a}}=\frac{y}{\frac{1}{b}}=\frac{z}{\frac{1}{c}}=\frac{x+y+z}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$ egalând fiecare raport cu ultimul.

EXERCIŢII

*

1). Să se împartă numărul 169 în trei părţi direct proporţionale cu numerele 2; 4; 7.

2). Să se împartă numărul 13,6 în părţi direct proporţionale cu numerele 4; 6; 7.

3). Să se împartă numărul 235/12 în părţi direct proporţionale cu numerele 4/3; 5/6; 1; 3/4.

4). Să se împartă numărul 186 în părţi invers proporţionale cu 2; 3; 5.

5). Să se împartă numărul 38 în părţi invers proporţionale cu numerele 2/3; 1/6; 1/2.

6). Să se împartă numărul 78 în părţi invers proporţionale cu numerele 2,5; 1/2; 5.

7). Să se împartă numărul 625 în părţi direct proporţionale cu numerele 0,2; 0,3; 0,(3).

8). Să se afle numerele x, y, z, t a căror sumă este 70 şi sunt invers proporţionale cu numerele 0,(3); 0,5; 0,2; 0,25.

**

9). Să se afle numerele $x, y, z \in Q$, în fiecare caz, ştiind că sunt direct proporţionale cu 3; 4; 5 şi :

a). $x + y + z = 84$ b). $x + 2y + 3z = 52$ c). $3x + 4y + 5z = 50$

d). $x^2 + y^2 + z^2 = 200$ e). $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{47}{80}$

10). Să se afle $x, y, z \in Q$ ştiind că sunt invers proporţionale cu numerele 0,8; 0,6; 0,4 şi :

a). $x + y + z = 260$ b). $2x + 3y + 4z = 245$

c). $x^2 + y^2 + z^2 = 1525$ d). $1/x + 1/y + 1/z = 0,25$

11). Să se afle trei numere raţionale direct proporţionale cu numerele 2; 3; 4 ştiind că media lor aritmetică este 30.

12). Laturile unui triunghi sunt direct proporţionale cu numerele 3; 5; 7 iar perimetrul său este 120 cm. Să se afle lungimile laturilor acestui triunghi.

13). Perimetrul unui dreptunghi este 176 cm. Să se afle aria lui, dacă dimensiunile sale sunt direct proporţionale cu 2,5 şi $1\frac{1}{6}$.

14). Să se afle $x, y, z \in Q$ dacă se ştie că sunt direct proporţionale cu numerele 5; 6; 7 şi $2x^2 + y^2 + 3z^2 = 233$.

15). Să se afle $x, y, z, t \in Q$ invers proporţionale cu numerele 1/5; 1/6; 0,(1); 0,1 dacă media aritmetică dintre cel mai mic număr şi cel mai mare este 22,5.

16). Să se afle media artimetică a patru numere care sunt direct proporţionale cu 2; 4; 5; 6 iar media aritmetică a primelor trei numere este 22.

17). Suma de 1520000 lei este împărţită la trei muncitori în părţi direct proporţionale cu numărul de ore lucrate. Să se afle cât a primit fiecare, dacă au lucrat 4 ore, 6 ore, respectiv 9 ore.

18). La o serbare s-au împărţit 112 bomboane la 6 copii în părţi direct proporţionale cu vârsta fiecaruia. Câte bomboane primeşte fiecare, dacă au 3 ani, 5 ani, 4 ani, 3 ani, 6 ani, 7 ani ?

19). Trei elevi au rezolvat 24; 27 respectiv 30 exerciţii. Ştiind că au primit note direct proporţionale cu numărul de exerciţii rezolvate şi media aritmetică a notelor este 9, să se afle ce notă a luat fiecare.

20). Trei muncitori au lucrat un număr de ore direct proporţional cu 3; 5; 7 şi au primit 1125000 lei. Ştiind că primul a lucrat 9 ore, aflaţi câte ore a lucrat fiecare şi ce sumă a primit fiecare.

21). Doi muncitori au observat la sfârşitul zilei că au stricat 10 piese respectiv 12 piese. Ştiind că sunt plătiţi invers proporţional cu numărul de piese defecte şi că au primit împreună

110000 lei, să se afle cât a primit fiecare.

22). Un cupon de pânză a fost împărţit în trei părţi direct proporţionale cu 1/2; 3/4; 1/3. Ştiind că întregul cupon costa 7600000 lei şi că prima parte are 24 m, aflaţi cât costă fiecare parte şi câţi metri are tot cuponul.

EXERCIŢII RECAPITULATIVE

1). Dacă $x = 4y$ aflaţi $\frac{2x+y}{3y}$.

2). Dacă $\frac{x}{3} = y$ aflaţi $\frac{2y}{2y+x}$.

3). Să se afle $x \in Q$:

a). $\frac{15}{x} = \frac{50}{30}$ b). $\frac{x+1}{3} = \frac{4,2}{7}$ c). $\frac{5x+2}{15} = \frac{32}{40}$

d). $\frac{2^{82}+4^{41}}{x+3} = \frac{10^{80}}{25^{40}}$ e). $\frac{5\cdot 2^{16}+4^7-8^5}{x-3} = \frac{38}{4}$ f). $\frac{\frac{1}{3}+2\frac{1}{6}}{x} = \frac{\frac{1}{8}}{20}$

g). $\frac{\left(\frac{2}{10}\right)^2}{2x} = \frac{0,1}{12\frac{1}{2}}$ h). $\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}:3}{x+\frac{1}{5}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$ i). $\frac{0,(6)}{0,2} = \frac{0,06}{(1-0,8)\cdot x}$

4). Să se afle x din proporţiile :

a). $\frac{\overline{ab}}{x} = \frac{15}{25}$, $\overline{ab}$ cel mai mare număr impar; b). $\frac{\overline{ab}}{x+1} = \frac{26}{6}$, $\overline{ab}$ cel mai mic număr prim, $a \neq b$.

c). $\frac{5\cdot 3^n + 2\cdot 3^{n+1} + 3^n}{2\cdot 3^n} = \frac{\overline{3ab}}{x-1}$, $\overline{3ab}$ cel mai mare număr divizibil cu 18.

5). Să se afle x : a). $\frac{x+3}{5} = \frac{x+6}{10}$; b). $\frac{2x+1}{10} = \frac{3x+1}{14}$

6). Să se afle x şi y dacă suma lor este 44 şi raportul lor este 3/8.

7). Să se afle x şi y dacă diferenţa lor este 36 şi raportul lor este 5/7.

8). Să se afle x şi y dacă suma lor este 35 şi $\frac{2x+3y}{3y} = \frac{3}{2}$

9). Să se afle $\frac{4x+y}{x+2y}$ dacă $\frac{3x+y}{4x+3y} = \frac{9}{17}$

10). Aflaţi x, y, z dacă $\frac{x}{3} = \frac{y}{6}$, $\frac{y}{2} = z$ şi $x + 2y + z = 18$.

11). Aflaţi x, y, z dacă $\frac{x}{0,3} = \frac{10y}{4}$ şi $\frac{y}{4} = \frac{3z}{5}$ şi :

a). $x + y + 3z = 72$ b). $x - z = 72$ c). $y + 3z = 90$ d). $x^2 + y^2 = 225$

12). Să se afle x şi y dacă se stabileşte o relaţie de direct proporţionalitate între :
a). {2x + 1; 18; y} şi {x; 8; 12}   b). {x; 18; 2x – 1} şi {y; 12; x + 1}
c). $\left\{x+1;\frac{4}{3};y\right\}$ şi $\left\{\frac{1}{2x+1};\frac{3}{7};x\right\}$ dacă se stabileşte o proporţionalitate inversă.
13). În ce cantitate de apă trebuie dizolvate 200 g sare pentru a obţine o soluţie cu concentraţia de 5% ?
14). Să se afle concentraţia unei soluţii formată din 80 g sare şi 1920g apă.
15). Se dizolvă o cantitate de sare în 576 g apă obţinându-se o soluţie cu concentraţia de 4%. Ce cantitate de apă trebuie adaugată pentru a se obţine o concentraţie de 3% ?
16). 30 g sare se dizolvă în 1470 g apă. Să se afle : a). concentraţia soluţiei ce se obţine; b). ce cantitate de apă trebuie adaugată pentru a se obţine o soluţie cu concentraţia de 0,5%.
17). 80 g de soluţie are concentraţia de 10%. Să se afle : a). câte grame de sare sunt dizolvate; b). ce cantitate de sare trebuie adaugată pentru a se obţine o concentraţie de 20% ?
18). În 40 g apă se dizolvă o cantitate de sare, astfel încât concentraţia soluţiei este de 20%. Să se afle : a). ce cantitate de sare conţine soluţia; b). dacă se mai adaugă 14 g sare, ce concentraţie va acea noua soluţie ?
19). 8 g de sare sunt dizolvate într-o cantitate de apă, obţinându-se o soluţie cu concentraţia 10%. Această soluţie se amestecă cu o altă soluţie de concentraţie 20%, care conţine 40 g apă. Să se afle : a). cantitatea de apă din prima soluţie; b). cantitatea de sare din a doua soluţie; c). concentraţia amestecului.
20). Într-o clasă de 28 elevi, fetele reprezintă 75% din numărul băieţilor. Câţi băieţi sunt ? Câte fete sunt ?
21). Într-o clasă sunt cu 5 băieţi mai mult decât fete şi fetele reprezintă 75% din numărul băieţilor. Câţi băieţi şi câte fete sunt ?
22). Într-o clasă sunt cu 12 băieţi mai mult decât fete şi fetele reprezintă 30% din numărul elevilor. Câţi elevi sunt ?
23). Un drumeţ a mers 24% din drum şi mai are 52 km până la jumatatea drumului. Câţi km are drumul ?
24). Un număr reprezintă 60% din altul. Aflaţi cele două numere din fiecare caz în parte: a). suma numerelor este 24; b). diferenţa numerelor este 12; c). produsul numerelor este 1500; d). c.m.m.d.c.-ul lor este 8; e). c.m.m.m.c.-ul lor este 90.
25). Un drumeţ a mers 12 km şi mai are 10% din drum până la jumătatea drumului. Câţi km are drumul ?
26). Un drumeţ a mers 30% din drum şi mai are de mers cu 28 km mai mult decât a mers deja. Câţi km a mers ?
27). Suma a două numere este 185. Să se afle cele două numere, dacă se ştie că unul din ele este mai mare decât celălalt cu 20% din suma lor.
28). Suma a trei numere este 280. Să se afle numerele, dacă primul număr reprezintă 25% din al doilea, iar al treilea reprezintă 15% din al doilea număr.
29). Suma a trei numere este 314. Să se afle cele trei numere, dacă primul reprezintă 14% din al doilea numar, iar al doilea reprezintă 50% din al treilea.
30). Dacă a reprezintă 40% din b şi 60% din c, a + b + c = 62, să se afle a, b, c.
31). a + b + c = 460. Să se afle a, b, c numere naturale, dacă a şi b sunt direct proporţionale cu 3 şi 4, iar b reprezintă 25% din c.
32). Cât la sută reprezintă b din suma a + b, dacă a reprezintă 40% din a + b ?
33). a). Un număr a reprezintă 20% din b. Cât la sută reprezintă b din 8a ?
b). Dacă b reprezintă 25% din a, să se afle cât la sută din suma celor două numere reprezintă a.
34). Un muncitor avea de efectuat un număr de piese. El a depăşit numărul de piese cu 30%, dar constată că 5 din ele sunt defecte. Ştiind că 528 de piese sunt bune să se afle câte piese avea de efectuat.
35). 80% din elevii unei clase merg să viziteze un muzeu. 50% din cei care au mers la muzeu, vor să meargă şi în excursie. Dacă 18 elevi din clasă nu vor în excursie, să se afle : a). cât la sută din numărul de elevi din clasă vor să meargă în excursie; b). câţi elevi merg la muzeu; c). câţi elevi vor să meargă în excursie.
36). Se ştie că un număr reprezintă 40% din dublul altui număr. Dacă media aritmetică a

celor două numere este 18, să se afle numerele.

37). 25% din elevii unei clase merg la olimpiadele şcolare. 2 elevi la olimpiada de matematică, 4 elevi la olimpiada de limba română, şi 2 elevi la olimpiada de istorie. Fiecare elev participă la o singură olimpiadă. 75% din ei s-au calificat pentru fazele superioare. Să se afle : a). câţi elevi sunt în clasă; b).cât la sută din elevii clasei merg la fiecare olimpiadă; c). cât la sută din participanţii la olimpiade merg la olimpiada de matematică; d). câţi elevi s-au calificat pentru fazele superioare.

38). Media aritmetică a două numere este 320. Dacă primul număr se măreşte cu 20% din suma lor şi celălalt se micşorează cu 32, să se afle cât la sută reprezintă suma numerelor astfel obţinute din suma numerelor iniţiale.

39). Se dă un dreptunghi cu lăţimea de 6 cm şi lungimea de 8 cm. Un alt dreptunghi are lăţimea egală cu 75% din lăţimea primului dreptunghi, iar lungimea cu 25% mai mică decât lungimea primului. Să se afle cât la sută reprezintă aria celui de-al doilea dreptunghi din aria primului dreptunghi.

40). Un dreptunghi are dimensiunile de 8 cm, respectiv 10 cm. Să se afle cât la sută din aria lui reprezintă aria unui pătrat care are latura egală cu 50% din lăţimea dreptunghiului.

Testul 1

⑤1p 1). Dacă $\frac{x}{5}=\frac{12}{3}$ atunci x = ...

⑤1p 2). Dacă din 15 l de lapte se scot 2 kg de smântână, din cât lapte se vor scoate 3 kg de smântână ?

3). ⑤1p a). 14% din 50 este ....

⑤1p b). dacă 5% din x este 18, atunci x = ...

⑦1p c). Un pantalon care costa 720000 lei costă acum 676800 lei. Cu ce procent a fost redus preţul ?

⑦1p 4). Dacă 6 cai mănâncă o cantitate de fân în 4 zile, atunci 8 cai o vor mânca în .... zile.

⑨1p 5). Dacă x şi y sunt direct proporţionale cu 2 şi 5 => $\frac{3x+y}{2y}$ = ...

⑨1p 6). Numerele x, y şi z sunt direct proporţionale cu 3, 7 respectiv 2 şi xy + yz = 175. Aflaţi cele trei numere.

⑩1p 7). Dacă x şi y sunt invers proporţionale cu 3 şi 4 şi c.m.m.d.c. al lor este 18 atunci atunci x = ... şi y = ...

Testul 2

⑤1p 1). Aflaţi x din proporţia : $\frac{50}{21}=\frac{x}{63}$.

⑤1p 2). 20% din 365 reprezintă ....

3). Într-o urnă sunt 7 bile roşii, 5 bile negre şi 8 bile albe. Aflaţi :

⑤1p a). probabilitatea ca la o extragere să obţinem o bilă neagră.

⑤1p b). probabilitatea ca la o extragere să obţinem o bilă care nu e albă.

⑦1p 4). Dacă $\frac{a}{b}=7$ şi $\frac{b}{c}=5$, atunci $\frac{a}{c}$ = ...

⑦1p 5). Ştiind că $x=\frac{4}{25}y$, să se afle cât la sută reprezintă x din y.

⑨1p 6). Să se afle numerele a, b şi c dacă sunt direct proporţionale cu 5; 7 respectiv 10 şi 2a + 3b − c = 210.

⑨1p 7). Un tren mergând cu viteza de 120 km/h parcurge distanţa de 600 m într-un interval de timp. Cu ce viteză trebuie să meargă astfel ca distanţa de 800 m să fie parcursă în acelaşi interval de timp?

⑩1p 8). Aflaţi media aritmetică a numerelor a şi b care sunt invers proporţionale cu numerele 0,5 şi 0,25 iar produsul lor este 288.

Capitolul IV

NUMERE ÎNTREGI

Reprezentarea pe dreaptă. Incluziunea $N \subset Z$

NOȚIUNI DE BAZĂ

- pentru reprezentarea numerelor întregi pe axă se aleg :

1) originea dreptei
2) sensul pozitiv (de la origine în dreapta) și sensul negativ (de la origine în stanga)
3) unitatea de masură

de exemplu : - se așează numărul întreg pozitiv 5 la capătul segmentului de lungime egala cu 5 unitati de măsură, spre dreapta, diferit de origine.

- se așează numărul între negativ – 8 la capătul segmentului de lungime egală cu 8 unități de măsură, spre stânga, diferit de origine.

EXERCIȚII

1). Reprezentați pe o dreaptă punctele corespunzătoare numerelor :

a). 1; –3; –5; 4; 6; –1 b). 7; –2; 3; –3; 5; –8 c). 10; –10; 30; –40; 50

d). 15; –25; 40; –40; –5; 30 e). 1000; –800; 300; –500; –200

2). Care din următoarele numere sunt naturale :

a). –5; –0,8; 3,2; 4; –1; 0; 5 b). 3/2; 4; –2; 6/3; –5

3). Să se precizeze, pentru fiecare număr în parte, dacă aparține sau nu mulțimilor N și Z :

a). –5; b). 3; c). 0,8; d). –1/2; e). –7; f). 4; g). 1,(3)

4). Fie mulțimile : $A = \{-5; 3; 3/4; 0,2; -1,(8); 2; 0; -4\}$

$B = \{x / x \in A \text{ si } x \in N\}$

$C = \{x / x \in A \text{ si } x \in Z\}$

$D = \{x / x \in A \text{ si } x \in Z \text{ si } x \notin N\}$

Să se arate că : a). $A \cap N = B$; b). $B \cup D = C$; c). $C - N = D$; d). $A \cap Z = C$

Valoarea absolută a unui număr întreg (modulul)

NOȚIUNI DE BAZĂ

- proprietăți : 1). modulul oricărui număr întreg este nenegativ
2). $|x| = |-x|$

EXERCIȚII

**

1). Dovedește că ai înțeles lecția :

a). $|-5| + |6| - |-11| =$ R : 0 b). $|-3| + |2| - |0| =$ R : 5

c). $|3| + |-6| - |-5| =$ R : 4 d). $|-6| + |12| : |-3| =$ R : 10

e). $(|-24| : |-8|)^2 - |-10| : |2| =$ R : 4 f). $|4| + |-4| \cdot 2 - |-16| : 2 =$ R :4

g). $|-12| : |7-3| + |-8| : 2 + 2 \cdot |0| =$ R:7 h). $|-4| + |6+3| - 2 \cdot |5-3| =$ R:9

i). $|7 + 9| + |-6| =$ R : 22 j). $|13 - 9| + |-12| =$ R : 16

k). $|31 - 29| + |42 - 25| =$ R : 19 l). $|2 \cdot 7 - 8| - |-5| =$ R : 1

m). $|3 \cdot 8 \cdot 0 + 4| - |0| =$ R : 4 n). $|2^3 - 7| - |-1| =$ R : 0

o). $|5^2 - 4^2| - |3^2| =$ R : 0 p). $|3|^2 - |-3|^2 =$ R : 0

r). $(|-6| + |-1|)^2 - 49 =$ R : 0 s). $|3 + |7 - 4|| =$ R : 6

t). $|6 - |22 - 4^2|| =$ R : 0 u). $|15 - |12 - 10|^2|^0 =$ R : 1

v). $||6 - 3|^2 : |-3| + |-5|^0|^2 =$ R : 16 z). $||2 \cdot 6 - 3| - |10| : |-5| - |-4||^3 =$ R : 27

2). Aşezaţi semnele „<" sau „>" sau „=" în locul semnului „?" pentru a obţine propoziţii adevărate:

a). $|8-5| \ ? \ |-3|$ b). $0 \ ? \ |10-7|$ c). $|7-2^2| \ ? \ |-4|$

d). $|3^2 - 5 \cdot 0| \ ? \ |0|$ e). $|-3|^2 \ ? \ |3^2|$ f). $2 \ |-3| \ ? \ |-4| : 2 + 2$

g). $|-2|^3 \ ? \ |3^2|$ h). $|2 + |6-3|| \ ? \ |-2|^2$ i). $|-5| + |-10| : 2 \ ? \ ||10-6| : |-2| + |-8||$

3). Aflaţi $x \in Z$ pentru care sunt adevărate următoarele propoziţii :

a). $|x| = 0$ b). $|x| = 5$ c). $|x| = 17$ d). $|x| = -1$ e). $|x| = 3$

f). $|x| = -3$ g). $|x| + 2 = 6$ h) $|x| - 3 = 7$ i). $2 \cdot |x| = 0$ j). $3 \cdot |x| = 27$

k). $4 \cdot |x| + 5 = 25$ l). $2 \cdot |x| - 3 = 7$ m). $3 \cdot (|x| + 2) = 18$ n). $2 \cdot (|x| + 1 + |x|) = 26$ o). $3 \cdot |x| = 8 + |x|$

Adunarea şi scăderea numerelor întregi. Desfacerea parantezelor

NOŢIUNI DE BAZĂ

- la adunarea numerelor întregi apar trei cazuri :

1). ambele numere sunt întregi pozitive (deci naturale) $\Rightarrow$ suma este suma numerelor naturale a şi b

2). ambele numere sunt întregi negative $\Rightarrow$ suma este $-(|a| + |b|)$

3). un număr este întreg negativ şi celălalt întreg pozitiv $\Rightarrow$ suma este : 0 dacă $|a| = |b|$.

Dacă $|a| \neq |b|$ efectuăm operaţie de scădere între modulul mai mare şi modulul mai mic, iar la rezultat se scrie semnul numărului care are modulul mai mare.

- se defineşte opusul numărului a ca fiind –a şi opusul numărului –a ca fiind a.
- la scăderea a doua numere întregi se efectuează operaţie de adunare între primul număr şi opusul celui de-al doilea.
- dacă în faţa unei paranteze este simbolul „+" atunci se suprimă paranteza şi simbolul „+" şi se scrie expresia din paranteză, neschimbată.
- dacă în faţa unei paranteze este simbolul „–" atunci se suprimă paranteza şi simbolul „–" şi se scrie expresia din paranteză schimbând simbolurile („–" în „+", respectiv „+" în „–").

EXERCIŢII

*

1). Poţi să le rezolvi în 10 minute ? Calculează :

a). $17 - 38 =$ b). $39 - 51 =$ c). $-34 + 42 =$ d). $56 - 80 =$ e). $-19 + 32 =$

f). $-34 + 51 =$ g). $-45 + 71 =$ h). $38 - 72 =$ i). $-13 - 15 =$ j). $-16 - 79 =$

k). $-108 - 83 =$ l). $-13 + 5 - 42 =$ m). $3 - 11 + 7 =$ n). $14 - 38 - 19 =$

o). $-17 + 9 - 13 =$ p). $-15 + 8 - 29 =$ r). $-6 + 12 - 7 - 2 + 4 =$

2). Consolidează-ţi cunoştinţele :

a). $-13 + 4 =$ f). $-10 + 15 - 18 + 20 - 9 =$ k). $0 - 7 =$

b). $28 - 30 =$ g). $-28 + 45 - 56 + 13 =$ l). $1 + 5 - 10 =$

c). $-7 - 8 =$ h). $-1 + 13 - 25 - 14 + 7 - 11 =$ m). $-14 - 25 =$

d). $-12 - 6 + 10 =$ i). $0 - 18 + 4 - 7 + 10 =$ n). $-15 + 6 - 17 =$

e). $42 - 28 - 37 =$ j). $13 - 20 - 18 + 6 - 4 + 15 =$ o). $21 + 15 - 32 - 24 + 5 =$

p). $11 - 20 + 12 + 5 - 37 =$ s). $-12 - 30 + 4 - 7 + 58 =$ v). $-17 - 21 + 45 - 50 + 6 =$

r). $25 - 15 - 10 - 14 + 8 =$ t). $-7 + 10 - 15 + 25 - 4 =$

**

3). Perseverează şi calculează :

a). $17 - (+19) =$ b). $-36 - (-39) =$ c). $48 - (-51) =$

d). $-30 + (+16) =$ e). $-(-5) + 3 =$ f). $-(+7) - (-13) =$

g). $-7 - (-3) - 2 =$ h). $-5 - 4 - (-8) - (-2) =$ i). $15 - 6 - (+3) - 17 =$

j). $8 - 10 - (-4 + 3) - 1 =$ k). $-3 + (-7) - (-11) =$ l). $-(-8) - (+3) + (-6) =$

m). $-5 + 2 - (-7 + 3) + (-4 - 5) =$ n). $6 - (4 - 7) + (-3 + 5) - (-2) =$

4). Verifică dacă rezultatele sunt corecte :

a). $7 - [3 - (10 - 15)] =$ R: -1

b). $17 - [2 - (-5 + 13)] =$ R: 23

c). $43 + [-15 + (12 - 51)] =$ R: -11

d). $53 - [-5 - (3 - 18)] =$ R: 43

e). $13 - [-2 + 5 - (-4 + 6 - 2)] =$ R: 10

f). $-15 - [-12 + (-3 + 7)] =$ R: -7

g). $-22 + 19 + [(-1) + 7 - (-5)] =$ R: 8

h). $-36 - (3 - 6) + (-5 - 3) =$ R: -41

i). $-5 - [-4 + (2 - 7)] =$ R: 4

j). $-[6 - (18 - 32)] + 27 =$ R: 7

k). $-34 - (12 - 24) + [(-5 - 7) + 9] =$ R: -25

l). $2 - [-17 + (2 - 8) - 3] + (-17 - 39) =$ R: -28

m). $-36 + \{-2 + [6 + (-18 - 16)]\} =$ R: -66

n). $-14 + \{-6 - 3 + [-6 + (-5)]\} =$ R: -34

o). $-13 + \{-17 - [-31 + 19 - (-3)]\} =$ R: -21

5). Dovedeşte că poţi să le rezolvi :

a). $|3| - |-6| =$ b). $|-4| + |-1| =$ c). $|6| - |-7| - |-13| =$

d). $-|-12| + |-3| =$ e). $|-18| - |-23| =$ f). $-18 + (-16 + |-3 - 9|) =$

g). $-3 - (+17 - |-19 - 3|) =$ h). $-19 + |-13 - 5 + |-7 - 8|| =$

6). Vrei să iei o notă bună ? Rezolvă :

a). $|-6| + (-13 + 10) + (-8) + |-2 + 5| =$ R: -2

b). $|-7 + 3| \cdot (-12 + 14) + (-10) =$ R: -2

c). $|-15| : |3| + (-6) + (-15 + 8) =$ R: -8

d). $(-4) + 15 : |-3| + (-8) + (-24 + 6) =$ R: -25

e). $(-6) + (-3) + |-12 + 20| =$ R: -1

f). $(-10) + |(-8) + (-3)| + (-4 + 9) =$ R: 6

g). $|-10 + (-3)| + |-3| \cdot (-4 + 6) + (-13) =$ R: 6

h). $|-4| + |-6 - 3| - 2 \cdot |-3 + 5| =$ R: 9

i). $[(-8) + (-3) + (-1)] + |-4| + (-8) =$ R: -16

j). $|-3 + 2| \cdot |4 + (-6)| + |-8| + (-25) =$ R: -15

Relaţiile de $<, \leq, \geq, >$ între numere întregi

NOŢIUNI DE BAZĂ

-un număr întreg a este mai mare decât un număr întreg b, ceea ce se scrie $a > b$.

- proprietăţi :
  a). $|a| \geq a$ oricare ar fi $a \in Z$
  b). $|a| \geq 0$ oricare ar fi $a \in Z$
  c). $a > 0$ oricare ar fi a strict pozitiv
  d). $a < 0$ oricare ar fi a strict negativ
  e). $a < b$ oricare ar fi a strict negativ şi b strict pozitiv

EXERCIŢII

******

1). Comparaţi :

a). -2 cu 5 b). -3 cu $|-7|$ c). -5 cu -6

d). $|-2|$ cu -4 e). $|-12|$ cu $|-26|$ f). $|-4| - 12$ cu -6

g). $|-5|$ cu $|7 - 8|$ h). $-|-3|$ cu $|6 - 9|$ i). $|-2|^2$ cu $|2 - 6|$

j). $|-5| - 6$ cu $10 - 11$ k). $-6 + 10$ cu $-(8 - 15)$ l). -8 cu $|-3| - |17| - |-20|$

m). $|-10 + 13| - 2$ cu $-6 + 5$ n). $|-6| - 2 \cdot (-13 + 15)$ cu $-8 + 8 \cdot (-6 + 8)$ o). 2 cu $|-2| - 2 + (-4 + 6) : |-2|$

2). Să se aşeze în ordine crescătoare numerele :

a). $-1; 6; -10; 2; -5; -8; 14; -3$ b). $|-2|$ $0; -3 + 1; |-5| - 6; |-2|^2 - 4; -(6 - 10)$

3). Să se aşeze în ordine descrescătoare numerele :

a). $-6; 4; 0; -1; -13; 12; -25; -8$ b). $|-4| \cdot 2; -|-5|; -6 + 2; -3 - (-5); -4 + (-1)$

4). Fie numerele : $A = -2 + 5 \cdot |-4 + 3| - 20$; $B = |-10 + 2| - (-5) + (-25)$; $C = -8 + (-6 + 3) - (-4)$.
Să se aşeze în ordine crescătoare numerele A, B, C şi apoi să se reprezinte pe dreaptă.

5). Care este : a). cel mai mic număr întreg din trei cifre; b). cel mai mare număr întreg negativ de patru cifre; c). cel mai mic număr întreg de cinci cifre; d). cel mai mare număr întreg negativ de două cifre ?

6). Se consideră cinci numere întregi consecutive. Să se afle numerele, ştiind că cel mai mare este 1.
7). Să se afle şapte numere întregi consecutive, ştiind că numărul din mijloc este -1.
8). Să se afle şapte numere întregi consecutive, ştiind că suma celor două mai mari este 3.
9). Care este mai mare : a). opusul lui -5 sau opusul lui -2; b). opusul lui -6 sau $|-10+7|$?
10). Să se afle diferenţa dintre cel mai mare număr întreg de două cifre şi cel mai mic număr întreg de trei cifre.
11). Cum va fi suma dintre cel mai mare număr întreg negativ de trei cifre şi cel mai mic număr întreg format dintr-o cifră faţă de -108 ?
12). Să se efectueze suma dintre cel mai mare număr întreg mai mic decât -20 şi cel mai mic număr întreg de două cifre.
13). Să se calculeze diferenţa dintre cel mai mic număr întreg mai mare decât -218 şi cel mai mare număr întreg de două cifre.

***

14). Să se afle x, în fiecare caz în parte :

a). $|x| < 4, x \in Z$ b). $|x| \le 7, x \in N^*$ c). $|x| = 0, x \in Z$ d). $|x| < 0, x \in Z$
e). $|x| > -3, x \in N$ f). $|x| \le -4, x \in Z$ g). $1 < |x| \le 3, x \in N$ h). $2 \le |x| < 4, x \in Z$

15). Fie $A = \{x \in Z \mid -3 < x \le 2\}$ si $B = \{x \in Z \mid |x| < 4\}$.
Calculaţi : a) $A - B$; b) $A \cap N$; c) $B - N^*$; d) $A \cap B$; e) $B - A$.

16). Fie $A = \{x \in Z \mid |x| = x, x < 10\}$; $B = \{x \in Z \mid |x| = -x, |x| \le 5\}$; $C = \{x \in Z \mid |x| = -x, x > -3\}$
Calculaţi : a) $A \cap B$; b) $A - C$; c) $B - A$; d) $B - N^*$; e) $C - N$; f) $A \cap N$

Înmulţirea numerelor întregi

NOŢIUNI DE BAZĂ

- se deosebesc trei cazuri : a). cele două numere sunt naturale;
b). cele două numere sunt întregi negative $\Rightarrow a \cdot b = |a| \cdot |b|$;
c). un număr este natural iar celălalt este întreg negativ $\Rightarrow a \cdot b = -|a| \cdot |b|$

EXERCIŢII

*

1). Dovedeşte că ai înţeles lecţia, calculând :

a). $-2 \cdot (-6) =$ b). $-3 \cdot 4 =$ c). $8 \cdot (-2) =$ d). $-6 \cdot (-3) =$ e). $10 \cdot (-11) =$
f). $-7 \cdot (-9) =$ g). $-8 \cdot 4 =$ h). $-7 \cdot (-8) =$ i). $-10 \cdot 3 =$ j). $8 \cdot (-6) =$
k). $-9 \cdot (-6) =$ l). $4 \cdot (-7) =$ m). $(-8) \cdot 9 =$ n). $(-7) \cdot 0 =$ o). $-1 \cdot (-4) =$

2). Aceste exerciţii sunt uşoare! Rezolvă-le :

a). $2 \cdot (-6) \cdot (-1) =$ b). $5 \cdot (-7) \cdot 0 \cdot (-3) =$ c). $-6 \cdot 2 \cdot (-3) \cdot (-4) =$
d). $-10 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot (-3) =$ e). $-3 \cdot (-2 + 10) =$ f). $(-4 + 6) \cdot (-4) =$
g). $(-4 + 5) \cdot (-2 + 7) \cdot (-1) =$ h). $-3 \cdot (-4) =$ i). $|6 + 5| \cdot (-2) \cdot |-6 + 10| =$
j). $|6 - 3| \cdot (4 - 6) \cdot (-2) =$

3). Poţi să le rezolvi în 5 minute ? Încearcă :

a). $-3 + 4 \cdot (-5) =$ b). $6 + 3 \cdot (-2) =$ c). $7 + 4 \cdot (-3) =$ d). $-15 + 5 \cdot (-2) =$
e). $6 - 3 \cdot (-4) =$ f). $-6 - 8 \cdot (-2) =$ g). $-15 - 3 \cdot (-2) =$ h). $4 - 5 \cdot (-1) =$

**

4). Consolidează-ţi cunoştinţele şi rezolvă :

a). $-5 + (-5) \cdot (-2) =$ b). $3 - (-3) \cdot 3 =$ c). $-4 - (-2) \cdot (-1) =$
d). $-5 - (-3) \cdot (-2) =$ e). $-2 \cdot (-3) + 4 \cdot (-7) =$ f). $6 \cdot (-5) - 5 \cdot 4 =$
g). $-4 \cdot (-8) - 3 \cdot 9 =$ h). $-6 \cdot (-7) - (-10) \cdot (-4) =$

5). Verifică rezultatul :

a). $(2-5)\cdot(4-2)=$ R: –6

b). $(-2)\cdot(-3)\cdot(4-9)\cdot(-1)=$ R: 30

c). $(-2)\cdot(6-8)\cdot(5-4)\cdot(9-10)=$ R: –4

d). $3\cdot(-5)-(-2)\cdot(-3+1)+8\cdot(-3)=$ R: –43

e). $-2\cdot(-4+5)\cdot(-3)-(-7+5)\cdot(-12+14)=$ R: 10

f). $-5+(-4+6)\cdot(-2)-(-8)\cdot 0+(-12+5+7)\cdot(-100)=$ R: –9

g). $-7\cdot(-12+5+4-1)-(-6)\cdot 2-(-10)=$ R: 50

h). $(-10+5)\cdot(-2+4)-(-6+3)+(-2)\cdot(-8+6)=$ R: –3

i). $-6\cdot(-3+5+7-12)-(-2)\cdot(-1)=$ R: 16

j). $[8-4\cdot(2-3)]\cdot(5-7)=$ R: –24

k). $(-2)\cdot[(-1)+4\cdot(-2)-(-5)\cdot 2]=$ R: –2

l). $[(-3+7)\cdot 2-5\cdot(-4+6)]\cdot(7-9)=$ R:4

m). $-6\cdot[-5+(-7+3-1)\cdot(-4)-(12-8)\cdot 2]-(-5)\cdot(-1)=$ R: –47

n). $(3-|-4|)\cdot(-7)-(-8)=$ R: 15

o). $|-3-3\cdot(-2)|\cdot(-4)-|-3|=$ R: –15

p). $|5-2\cdot|-6|-5-2\cdot(4-8)|=$ R: 4

r). $|-5|\cdot(-2)+|-5+7\cdot(-2)|\cdot(-1)=$ R: –29

s). $-2\cdot|13-|-17||-(-16+3)\cdot(-1)=$ R: –21

t). $|-3\cdot(-4)-15|\cdot(-2)+5=$ R: –1

u). $(5-|-8|)\cdot(-5)-(-7-|-3|)=$ R: 25

v). $[(-5+11)\cdot(-5)+(-8)\cdot(-4)]\cdot(-9)+21=$ R: 3

6). a). Să se afle numărul întreg care este de 5 ori mai mare decât –3.

b). Să se afle numărul întreg al cărui modul este triplul numărului întreg 2.

c). Dacă se scade dintr-un număr întreg produsul dintre 2 şi –4, se obţine –14. Să se afle numărul.

Împărţirea numerelor întregi

OŢIUNI DE BAZĂ

- se disting trei cazuri :

I. cele două numere sunt naturale

II. cele două numere sunt întregi negative $a : b = |a| : |b|$.

III. un număr este natural iar celălalt este întreg negativ $a \cdot b = -|a|\cdot|b|$

EXERCIŢII

*

1). Arată că ai înţeles lecţia, calculând :

a). $8:(-2)=$ b). $-10:2=$ c). $-12:(-3)=$ d). $-15:5=$

e). $16:(-4)=$ f). $9:|-3|=$ g). $-10:|-2|=$ h). $-20:4=$

i). $-24:|-6|=$ j). $-42:(-14)=$ k). $-56:(-2)=$ l). $72:(-3):(-8)=$

m). $-54:(-6)=$ n). $-63:|-3|^2=$ o). $-81:(-3):(-9)=$

**

2). Verifică rezultatul :

a). $(-2)\cdot(-6):(-3)=$ R: –4 b). $(-10):5\cdot(-1)=$ R: 2

c). $18:(-2)\cdot 7:(-21)=$ R: 3 d). $-16:|-2|^3=$ R: –2

e). $(-10) : (-2) \cdot (-6) : 15 =$ R: -2
f). $-100 : (-50) + (-7) =$ R: -5
g). $-8 + 20 : (-5) =$ R: -12
h). $-14 : (-7) - (-8) : 2 =$ R: 6
i). $-12 : (5 - 11) + (-3) : (-1)$ R: 5
j). $-6 : 3 - (-4) : (-2) + 10 =$ R: 6
k). $-14 : (-2) + 3 \cdot (-4) =$ R: -5
l). $-12 : (-6 + 3) - (-2) \cdot 5 =$ R: 14
m). $-2 + 6 \cdot (-2) - (-28) : 2 =$ R: 0

3). Consolidează-ţi cunoştinţele şi calculează :

a). $|-10 + 24| : (-7) =$
b). $|-3 - |(-2) \cdot 3| + 1| : (-16 + 12) =$
c). $||-2| \cdot (-6 + 2) + 5 \cdot (-2)| : (-3 - 1 - 2) =$
d). $-12 : |-9 + |(-5) \cdot 4 : 2| + (-5)| =$
e). $-27 : |4 : (-2) - 15 : (-3) - |14 : (-7) - 4|| =$
f). $|96 : |32 - 2 \cdot (-8)| + 2 \cdot (-5)| : (-4) =$
g). $-15 : |-3| + 7 =$
h). $-10 - |-14 : 2 + 9 : (-3)| =$
i). $-8 : |-1 - 3| + |12 : 6| =$
j). $25 : (-10 + 3 + 2) - |-24| : (-6) =$
k). $-26 : [4 \ (-3) : 2 : (-6) \cdot (-13)] =$
l). $46 : [(-2) \cdot (9 - 17) : (-4) \ 5 - 3] =$

4). Dovedeşte că poţi să le rezolvi :

a). $(-24) : (-4) + (-6) : 2 =$
b). $(-12) : (-8 + 4) + (-10) : 5 =$
c). $[(-7 - 9) : (-4) + (+6)] : 5 =$
d). $36 : [(-12) : 6 + (-1)] - (-4) =$
e). $(-8 + 2) \cdot (-3) : (-2) + (-8) : 2 =$
f). $(-3) \cdot (8 - 12) : (4 - 6) + (-10) : (10 - 15) =$
g). $[(-5 + 1) : 2 + (-8) : (-2)] : (6 - 7) =$
h). $-10 : (5 - 3) - (-4) =$
i). $(-6 - 8) : (-7) + (-3) =$
j). $(-6 + 5) \cdot (-8 - 2) : (6 - 8) =$
k). $(-6) : 3 + (4 - 5) \cdot (-6 + 8) =$
l). $-25 : (10 - 3 \ 5) + 12 : (-4) \ (-1) =$
m). $(-9 + 3) \cdot (-3 + 4) : (-3) - (-6 + 2) =$
n). $-4 + (-6 - 3) : (-2 + 5) - (-8) =$

5). Dacă faci primul exemplu, următoarele ţi se vor părea uşoare :

a). $-8 \cdot (-6) : (-4) - |-16| =$ R : -28
b). $-9 \cdot (-6) \ |7 - (-4 + 1)| : (-12) =$ R : -45
c). $[-28 : (-7) - (-30) : (-6)] \cdot 7 - |0 - 4| =$ R : -11
d). $-18 : (-2) : (-3) + |-18| : |-2| =$ R : 6
e). $|-16 : (-2) - (-5) \cdot (-3)|^2 \ (-2) : (-14) =$ R : 7
f). $| \ |5 - 8| - 6|^2 : |21 : (-7) + 0^2| =$ R : 3
g). $| \ |-16 + 9| - |-3| \cdot |4| \ | : (-5) =$ R : -1
h). $|-8 : (-4) - 15| + (-13) =$ R : 0
i). $|-432 : (-9) : (-4) + (-5) \cdot (-3)|^2 - |-4|^2 =$ R : -7

EXERCIŢII RECAPITULATIVE

******

1). Ai încredere în tine şi rezolvă :

a). $-117 : (-3) + 5 \cdot (-7) =$ R : 4
b). $-15 \cdot (-8) : 10 - 16 \cdot (-3) : (-2) =$ R : -12
c). $-|-3| \cdot (-5) - |-5|^2 =$ R: -10
d). $-15 - (-2) \cdot |-6 + 2|^2 =$ R: 17
e). $|-16 : (-2) + 5 \cdot (-2)|^2 : (-4) =$ R: -1
f). $[-2 \cdot (-3) \cdot (-1) + (-4)] : (-4 + 9) =$ R: -2
g). $-3 \cdot [(-4 + 2) + (-3 + 4) \cdot (-2)] : (5 - 11) =$ R: -2

h). $-1 \cdot [(-4) + (-2) \cdot (-6) + (-6 - 4) : 2] - (2 - 5) =$ R: 0

i). $\{[-2 + (-3) : (-1)] \cdot (-6) + 4\} : (-7 + 6) =$ R: 2

j). $[-12 + 2 \cdot (-5 + 6)] : (-12 + 7 - 3 + 6) =$ R: 5

k). $-[-3 + 2 \cdot (-4) \cdot (-10 + 5)] : (-1) =$ R: 37

l). $8 : [-6 + 2 \cdot (-3 + 4)] - [(-3) \cdot 2 + (-2) \cdot (-9)] =$ R: –14

m). $2 \cdot [(-12) : (-1 + 3 - 4 + 5) + (7 - 8)] =$ R: –10

n). $-\{8 \cdot [(-5 + 3) - (-1)] - 2 \cdot (-3)\} - (6 - 10) =$ R: 6

o). $[(-3) \cdot (-4 + 12) - (7 - 13) : (-2) : 3] : (-5) =$ R: 5

p). $|-7 - 8| : (-6 + 3) - |-2| \cdot (-7 + 2) =$ R: 5

2). Vrei să iei o notă mare ? Calculează :

a). $[-6 \cdot (-5 + 2) - (-3)] : (-7) + (4 - 9) =$ R: –8

b). $(-12) : (-6 + 3) - (-2) \cdot 5 =$ R: 14

c). $|-8 + 2 \cdot 3| \cdot (-10 + 15) - |2 - 4| =$ R: 8

d). $2^3 - |-2 + 3| \cdot |-5| + (-7) =$ R: –4

e). $(-8 + 10) \cdot |-5| - |-3 + 3 \cdot 1| \cdot (-4 + 8) =$ R: 10

f). $|-12 + 6 + (-4)| : |-10 + 5| =$ R: 2

g). $|-3 + 2| \cdot |4 + (-6)| + |-2|^3 =$ R: 10

h). $[(-3) \cdot (9 - 5) - (6 - 10)] : (-2) - |10 - 16| =$ R: –2

i). $[1 - (-3) \cdot 5 + (-2) \cdot 3] : 2 =$ R: 5

j). $[-2 \cdot (5 - 7) + |-4 - 8| - (-2)] : (-3) =$ R: –6

k). $[-3 + 5 \cdot (-2) - (-28) : 4 - (6 - 12)] \cdot (-1) =$ R: 0

l). $-12 : 3 - (-8) \cdot (4 - 5) + 10 : (7 - 9) =$ R: –17

m). $(-5 + 6) \cdot [2 - (-3) \cdot (-2) + (-8)] : (-3) =$ R: 4

n). $(-24) : (32 - 20) - (-6) : 3 =$ R: 0

o). $-[-(7 - 15) : (-4) + (-3 + 5) - (-10)] =$ R: –10

Divizorii unui număr întreg

NOŢIUNI DE BAZĂ

- un număr întreg a este divizibil cu un numă întreg b, dacă există un număr întreg c astfel încât $a = b \cdot c$.
- notaţie : $a \,\vdots\, b$ („a se divide cu b") şi $b \mid a$ („b divide a").

EXERCIŢII

*

1). Să se scrie elementele mulţimilor : a). D_{-12} ; b). D_{18} ; c). D_{-20} ; d). D_{25} ; e). D_{-72}

**

2). Să se efectueze :

a). $D_{-14} \cap D_{21}$ b). $D_8 - D_{12}$ c). $D_{25} \cap D_{35}$ d). $D_{16} - D_{-20}$ e). $D_{10} \cap D_{-6}$

f). $(D_{12} - D_{18}) \cup D_{-8}$ g). $D_{14} - (D_{21} \cap D_{-7})$ h). $(D_{-8} \cup D_{10}) - D_{24}$

3). Să se afle $x \in Z$ astfel încât :

a). $\frac{6}{x} \in Z$ b). $\frac{-8}{x} \in Z$ c). $\frac{5}{x+3} \in Z$ d). $\frac{-6}{2x+1} \in Z$

4). Să se afle $x \in N$ astfel încât :

a). $\frac{3}{x} \in N$ b). $\frac{-8}{x} \in N$ c). $\frac{-4}{x+1} \in Z$ d). $\frac{-7}{2x+3} \in Z$

5). Să se afle $x \in Z$ astfel încât : a). $\frac{7}{x+1} \in N$ b). $\frac{-6}{x} \in N$

***

6). Să se afle x astfel încât :

a). $\frac{x+2}{x-1} \in Z, x \in Z$ b). $\frac{x-5}{x+2} \in Z, x \in N$

c). $\frac{2x+3}{x-1} \in N, x \in Z$ d). $\frac{6x+1}{2x+3} \in Z, x \in Z$

7). a). Fie $A = \{x \in Z \mid x \vdots 3, |x| < 20\}$ şi $B = \{x \in Z \mid 21 \vdots x\}$. Calculează : i). $A \cap N$

ii). $A \cap B$.

b). Numerele întregi x şi y verifică relaţia $3 \cdot |x| - 14 \cdot |y| = 42$.

i). aflaţi x dacă |y| este număr prim;

ii). aflaţi y dacă |x| este număr prim.

8). Să se arate că :

a). $\frac{2^{3n+1} + 4^n \cdot 2^{n+2} + 8^n}{7} \in N$, $n \in N$ b). $\frac{3 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{33}}{39} \in N$, $n \in N$

c). $\frac{\overline{ab} + \overline{ba}}{11} \in N$, a, b cifre d). $\frac{\overline{10bc}}{111} \notin N$, oricare b, c cifre

9). Aflaţi a, b cifre dacă $\frac{\overline{3ab}}{75} \in N$.

10). Aflaţi a, b cifre, a < b, $\frac{\overline{4ab}}{36} \in N$.

Puterea cu exponent număr natural a unui număr întreg

NOŢIUNI DE BAZĂ

- prin a^n se înţelege produsul numărului a cu el însuşi de n ori : $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot ...... \cdot a}_{n \text{ factori}}$,
- proprietăţi : $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ $a^m : a^n = a^{m-n}$ $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

EXERCIŢII

*

1). Calculaţi :

$(-2)^3$; 3^4; $(-3)^4$; $(-1)^5$; $(-1)^{10}$; $(-1)^{32}$; $(-1)^{45}$; $(-3)^3$; $(-5)^0$; $(-11)^2$; $(-1)^0$; $(-13)^0$; $(-13)^2$; $(-7)^1$.

**

2). Dovedeşte că ai înţeles lecţia :

a). $(-2)^2 - 1^0 + (-3)^1 =$ R: 0 b). $(-5)^2 + (-2)^3 + (-1)^{15} =$ R: 16

c). $(-3)^3 - (-7)^0 + (-2)^4 =$ R: –12 d). $(-2)^3 + (-1)^0 - (-3)^2 + (-5)^2 =$ R: 9

e). $(-10)^2 + 4 \cdot (-3)^3 =$ R: –8 f). $4^2 : (-2)^3 + (-1)^5 =$ R: –3

g). $0^2 - (-2)^3 + 5^0 + (-3)^2 =$ R: 18 h). $(-3)^2 \cdot 4 + (-2)^5 =$ R: 4

i). $(-2)^4 - (-3)^2 =$ R: 7 j). $(-2)^3 + (-7)^1 =$ R: -15

k). $-6 - (-3)^2 + (-2)^3 =$ R: -23 l). $(-4)^2 + (-6^2) - (-5) =$ R: -15

m). $(-2^5) + 3^3 - (-4)^2 =$ R: -21 n). $(-3^2) + (-3)^2 + (-2^4) =$ R: -16

o). $2^3 - (-2)^3 + (-1)^{100} =$ R: 17 p). $(-5)^0 + 3^2 - (-4)^4 =$ R: -246

r). $2^4 + (-2)^0 - (-3)^3 =$ R: 44 s). $(-3)^3 + (-1)^{18} - (-7)^0 + (-3)^4 =$ R: 54

3). Verifică rezultatul :

a). $(-3)^5 \cdot [(-3)^2]^3 =$ R: $(-3)^{11}$ b). $(-2)^8 \cdot (-2)^3 \cdot [(-2)^2]^3 =$ R: $(-2)^{17}$

c). $(-1)^8 \cdot [(-1)^2]^3 \cdot (-1)^4 =$ R: $(-1)^{18}$ d). $[(-5)^0 \cdot (-5)^1 \cdot (5)^2]^3 =$ R: $(-5)^9$

e). $2^5 \cdot (-2)^3 \cdot (-2)^4 : 2^{10} =$ R: (-2^2) f). $[(-2)^3 \cdot (-2)^5]^2 : 2^{15} =$ R: 2

g). $6^3 \cdot (-6)^5 : (-6)^6 =$ R: -6^2 h). $[(-3)^2]^6 \cdot 3^4 : (-3)^8 =$ R: 3^8

i). $(-7)^2 \cdot 7 \cdot (-7)^9 : 7^{11} =$ R: -7 j). $[(-2)^3]^2 \cdot 2^8 : [(-2)^2]^6 =$ R: 2^2

k). $[(-5)^2]^2 \cdot (-5)^4\ 5^7 : [5^3 \cdot (-5)^{12}] =$ R: 1

l). $(-6)^3 : (-1)^5 =$ R: 6^3 m). $(-1)^6 : 1^{16} =$ R: 1

n). $(-1)^{35} : 1^{35} =$ R: -1 o). $(-10)^3 \cdot 0^3 =$ R: 0

p). $[(-3)^2]^6 \cdot (0^1 \cdot 0^2 \cdot 0^3)^2 =$ R: 0 r). $(-2)^4 : (-1^4 \cdot 3^2)^0 =$ R: 16

Ordinea efectuării operaţiilor şi folosirea parantezelor

**

1). Consolidează-ţi cunoştinţele şi rezolvă :

a). $\{(-3) \cdot [(-3)^2 - 5] - (6 - 10)\} : (-2) - |10 - (-2)^4| =$ R : -2

b). $[1 - (-3) \cdot 5 + (-2) \cdot 3] : 2 =$ R : 5

c). $[-2 \cdot (5 - 7) + |-2^2 + (-2)^3| - (-2)] : (-3) =$ R : -6

d). $[-3 + 5 \cdot (-2) - (-28) : (-2)^2 - (6 - 12)] \cdot (-1) =$ R : 0

e). $\{-[(-4)^2 + (-2^4) : (-2)^2] \cdot (-1) + 3\} : (-5 + 10) =$ R : 3

f). $-12 : 3 - (-2)^3 \cdot (4 - 5) + 10 : (7 - 9) =$ R : -17

g). $-[-(7 - 15) : (-2^2) + (-3 + 5) - 2 \cdot (-5)] =$ R : -10

2). Poţi să le rezolvi în 10 minute ?

a). $2^7 \cdot 2 \cdot (-2)^4 - 2^{12} =$ R : 0 b). $(-12)^2 : (-3) : (-8) + (-3)^2 =$ R : 15

c). $(2^6 \cdot 2^3) : (2 \cdot 2^2 \cdot 2^4) =$ R : 4 d). $[(-14) : 2 + 5]^3 \cdot (-3) : (-6) =$ R : -4

e). $-6 - 3 \cdot (-2)^2 + (-3)^3 =$ R : -45 f). $(1 - 4)^3 \cdot (5 - 8)^8 \cdot (-3) : 9^6 =$ R : 1

g). $3^5 \cdot 3^4 \cdot 3^3 \cdot 3 + (-3)^{13} =$ R : 0 h). $[(-2 + 5)^4 \cdot 3^6] : 3^3 : (-7 + 4)^4 =$ R : 27

3). Verifică rezultatul :

a). $(-6)^2 : (-9) + (-3)^2 =$ R : 5

b). $(-5 + 10)^8 : [(-4 + 9)^4 \cdot (-5)^2] =$ R : 25

c). $[(-12) : 3]^2 \cdot 4^3 + (-4)^5 =$ R : 0

d). $[(-3)^4 \cdot 9^4] : [(-3)^7 : (-3)^5 \cdot 3^9] =$ R : 3

e). $[(-2)^3 + 2^0]^4 \cdot 7^3 : 7^5 - 49 =$ R : 0

f). $[2 + (-1) \cdot 5]^7 \cdot (-3)^9 \cdot 3^{10} : (-3)^{23} =$ R : -27

g). $5^3 \cdot [(-5) \cdot (-1)]^6 - 5^4 \cdot 5^3 \cdot (-10 + 5)^2 =$ R : 0

h). $[2^0 + (-3)]^2 \cdot (-4 + 6)^5 \cdot (8 - 10)^6 - 2^{10} \cdot (-1 + 3)^3 =$ R : 0

4). Fi perseverent şi rezolvă :

a). $[(-4)^3 : (-8) + 1] : (-3) =$ R: -3 b). $[-3^2 + (-2)^2]^7 : (-5)^3 : (-5)^2 =$ R: 25

c). $|2^2 - 3^2|^{10} : 125 : 625 =$ R: 5^3

d). $[(-2)^0 + 2 \cdot (-3)]^6 \cdot (-25)^2 : 5^5 =$ R: 5^5

e). $(-3)^4 \cdot |-3|^5 : (27 \cdot 27 \cdot 9) =$ R: 3

f). $(-14)^2 : (-4) - (-2)^4 \cdot (-3) =$ R: 97

g). $[(-15)^2 : (-25) - 3] : (-4) =$ R: 3

h). $\{[10 : (-5)]^{12} : 64 - 15\} - (-7)^2 =$ R: 0

i). $[(-5)^3 \cdot (-2 + 7)^4 \cdot (-5)] : 5^6 + 5^0 =$ R: 26

j). $[(-16)^2 : (-1)^3 : (-2)^4 - 4] : (-5) =$ R: 4

k) $[(-12)^2 : (-6) : (-2) - (-4)] : (-4) =$ R: -4

5). Să se scrie elementele mulţimilor şi să se efectueze :

$A = \{x \in Z \mid |x| \text{ divide } -12\}$ $B = \{x \in N \mid |x| < 5\}$

$C = \{x \in Z \mid |x| \leq 3\}$ $D = \{x \in N \mid |x| \text{ divide } -20 \text{ si nu divide } 28\}$

$E = \{x \in Z \mid x^2 = 9\}$ $F = \{x \in N \mid 6/x \in N\}$

$G = \{x \in N \mid x^2 \leq 9\}$ $H = \{x \in Z \mid -6/x \in N\}$

$I = \{x \in Z \mid 1 < |x| \leq 4\}$

a). $B - A =$ b). $A \cap B \cap F =$ c). $(C \cap I) - E =$

d). $(G - A) \cup C =$ e). $(I - N) \cap H =$ f). $(C \cap N) - F =$

***

6). Să se calculeze :

a). $(-1)^k + (-1)^{k-1} + (-1)^{2k-1} + (-1)^{2k-2} =$ b). $(-1)^n - (-1)^{n-1} - 2 \cdot (-1)^{n-2} + (-1)^{2n} =$

unde $k, n > 2$ şi $k, n \in N$.

7). Să se arate că :

a). $(-2)^{2n} \cdot 25^n = (-10)^{2n}$, oricare $n \in N$

b). $(-2)^n + (-2)^{n+1} - (-2)^{n+2} = -5 \cdot (-2)^n$, oricare $n \in N$

c). $2 \cdot (-2)^n + (-2)^{n-1} - (-2)^{n-2} - (-2)^{n-3} = -11 \cdot (-2)^{n-3}$, oricare $n \in N, n \geq 3$

d). $\dfrac{(-2)^n - (-2)^{n+1}}{3}$ este număr întreg.

8). Să se rezolve în mulţimea Z :

a). $3 - [4 + (-8 - x)] = 1$ b). $(x + 3) \cdot (y - 4) = 5$ c). $x \cdot (x + 1) = 6$

d). $x \cdot (x + 2) = 8$ e). $x \cdot (x - 3) = 10$ f). $(x - 2) \cdot (x + 5) = -12$

g). $x \cdot y = 2$ h). $(x + 1) \cdot y = -3$ i). $-5 - \{4 - [-5 + (-7 + x) - 3] - 5\} = -20$

9). Să se compare :

a). $(-2)^4$ cu $(-3)^4$ b). $(-2)^3$ cu $(-3)^3$ c). $(-2)^{51}$ cu $(-3)^{51}$

d). $(-2)^{240}$ cu $(-3)^{240}$ e). $(-2)^{33}$ cu $(-3)^{22}$ f). $(-2)^{27}$ cu $(-8)^9$

g). $(-2)^{10}$ cu $(-4)^5$ h). $[(-3)^9]^2$ cu $(-27)^6$

Ecuaţii de forma $x + a = b$; $a, b \in Z$

*

1). Să se rezolve :

a). $x + 18 = -21$ b). $x - 3 = -29$ c). $x + 13 = 0$ d). $x + 9 = 3$

e). $x - 17 = -51$ f). $x + (-5) = 4$ g). $x + (-7) = -2$ h). $x + (-2) = -4$

i). $-4 + x = 3$ j). $-10 + x = 2$ k). $-12 + x = -4$ l). $x - (-2) = 3$

m). $x - (-6) = -3$ n). $x - (-8) = -10$ o). $x - (-5) = 2$ p). $x - (-4) = -3$

2). Să se afle numărul întreg care adunat cu -3 este -8.

3). Să se afle un număr întreg , ştiind că dacă se scade 2 din el se obţine -8.

4). Să se afle numărul întreg al cărui modul este cu -6 mai mic decât -11.

5). Să se rezolve în Z :

a). $-4x = 16$ R: -4 b). $-5x = -20$ R: 4 c). $3x = -9$ R: -3

d). $x : (-3) = 4$ R: -12 e). $x : (-4) = -13$ R: 52 f). $7x = -63$ R: -9

g). $18 : (-x) = 2$ R: -9 h). $-9 : x = -1$ R: 9 i). $8 : x = -2$ R: -4

j). $16 : (-x) = -4$ R: 4 k). $-27 : (-x) = 3$ R: 9

**

6). Să se rezolve :

a). $x + 16 - 30 = -5$

b). $-(2 - 3) + x = 21$

c). $x - (6 - 2^2) = 0$

d). $x + (-5 + 1) - 6 = -(-7) + 1$

e). $x + (-6) - (-7) = -[-2 - (3 - 1)]$

f). $-2 - (4 - 3) - (3 - 4) + x = -(3^2 - 3^1 - 3^0)$

7). Să se rezolve :

a). $x - |-6| = 3 + |-8|$ b). $x + |2 - 6| = 4^2 - |-2|$

c). $|3^2 - 6 - 2^2| + x = 6^2 : 3^2 - 5$ d). $||4 - 8| - 8| + x = 3 - |7 - |6 - 15||$

e). $2 \cdot |3 - 4| + x = |6 - 12| : 3$ f). $x + [|-12| : 2^2 + 1]^3 = -14$

g). $|-8 + (-8)| : |-2| + x = |-2|^2$ h). $[-(4 - 6)] \cdot (3^3 : 9) + x = -(2 \cdot 5 - 6)$

8). Aflaţi $x \in Z$ pentru care sunt adevărate propoziţiile :

a). $|x + 1| = 5$ b). $|x + 2| = 6$ c). $|x + 3| = 0$

d). $|x - 6| = 0$ e). $|x - 6| = 8$ f). $|x - 5| = 18$

g). $|x - 2| = -3$ h). $|x - 4| + 3 = 4$ i). $|x + 1| - (3 - 8 + 4) = 0$

j). $2 \cdot |x + 3| = 4$ k). $||x| + 3| = 7$ l). $||x| - 5| = 2$

9). Să se rezolve în Z :

a). $3x + 8 = 2$ R: -2 e). $4(5 - x) = -24$ R: 11 i). $-8 - 9x = 19$ R: -3

b). $4x - 16 = -20$ R: -1 f). $5 - 8x = -27$ R: 4 j). $-8 = 4 + 3(x + 2)$ R: -6

c). $18 - 5x = 23$ R: -1 g). $2(x - 3) - 8 = -18$ R: -2 k). $4 + 10x = -16$ R: -2

d). $4(5 - x) = 24$ R: -1 h). $2(1 - x) = -10$ R: 6 l). $3x - 4 \cdot [-5 + (-2)^2] = 1$ R: -1

10). Să se rezolve în Z :

a). $x^2 + 5 = 9$ $x \in \{-2; 2\}$ b). $x^2 - 2 = 14$ $x \in \{-4; 4\}$ c). $8 - x^2 = 4$ $x \in \{2; -2\}$

d). $3x^2 = 27$ $x \in \{-3; 3\}$ e). $4x^2 = 196$ $x \in \{-7; 7\}$ f). $2x^2 = 288$ $x \in \{-12; 12\}$

g). $3x^2 + 1 = 109$ $x \in \{-6; 6\}$ h) $4x^2 - 5 = 31$ $x \in \{-3; 3\}$

i). $5x^2 - 6 = -26$ $x \in \varnothing$ j) $2(x^2 + 1) - 7 = 3$ $x \in \{-2; 2\}$

Inecuaţii în Z

**

1). Rezolvaţi în Z :

a). $2x - 3 \leq 7$ R: $\{...; 4; 5\}$ b). $4x + 5 < 9$ R: $\{...-1; 0\}$

c). $4 - 2x \geq 10$ R: $\{... -4; -3\}$ d). $-8 + 5x \leq -8$ R: $\{...-1; 0\}$

e). $8 < 9 - x$ R: $\{...-1; 0\}$ f). $10 \leq 4 + 3x$ R: $\{2; 3; ...\}$

g). $2(x + 1) \geq -8$ R: $\{-3; -2; ...\}$ h). $3(x + 6) \leq -9$ R: $\{...-10; -9\}$

i). $5 + 2(x - 1) \geq 7$ R: $\{2; 3; ...\}$ j). $9 - 3(x + 2) < -3$ R: $\{3; 4; ...\}$

k). $10 < 3(x + 8) + 1$ R: $\{-4; -3; ...\}$ l). $-6x - 13 \leq 29$ R: $\{-7; -6; ...\}$

m). $-8 \cdot (-x) + 4 \geq -20$ R: $\{-3; -2; ...\}$ n). $12 + 3 \cdot (-2x) > 0$ R: $\{...0; 1\}$

o). $(-4x) : 2 + 6 > -4$ R: $\{...3; 4\}$ p). $(-9x) : (-3) + 2 \leq 7$ R: $\{...0; 1\}$

2). Rezolvați în Z :

a). $-5(2-|x|)<10$ R: $\{-3;-2;-1;0;1;2;3\}$ b). $|x-1|<1$ R: $\{1\}$

c). $3|x+1|\le 6$ R: $\{-3;-2;-1;0;1\}$ d). $2|x|\le -4$ R: $\varnothing$

e). $-2|x|+3>-5$ R: $\{-3;-2;-1;0;1;2;3\}$ f). $-2\cdot|2x|\ge 8$ R: $\varnothing$

g). $2(|x|+1)\le 8$ R: $\{-3;-2;-1;0;1;2;3)$ h). $|x|\le 2$ R: $\{-2;-1;0;1;2\}$

EXERCIȚII RECAPITULATIVE

1). Comparați :

a). 5,16 cu 5,6 b). 2,3 cu 3,2 c), 1,2 cu 1,20 d). 1,375 cu 1,37

e). 5,(3) cu 5,(32) f). 4,(6) cu 4,6 g). $\frac{11}{6}$ cu 1,9

2). Găsiți a 70 zecimală a numerelor : a). $\frac{1}{11}$; b). $\frac{1}{22}$.

3). Puneți numere naturale consecutive în locul punctelor : $\frac{8}{3}<.....<\frac{13}{4}<.....$

4). Puneți numere raționale în locul punctelor : $\frac{8}{7}>.....>\frac{9}{8}>.....>1{,}124$

5). Demonstrați că :

a). $\frac{24}{\overline{2,(x)}+\overline{x,(6)}}\in N$ b). $2{,}5(7)+3{,}4(2)\in N$ c). $\frac{2{,}4(3)+0{,}3(6)}{0{,}04}\in N$

d). $0,(1)+0,(2)+.....+0,(8)\in N$ e). $\frac{\overline{0,x}+\overline{1,x}+\overline{2,x}+.....+\overline{9,x}}{\overline{1,(x)}+\overline{2,(x)}+.....+\overline{9,(x)}}\in N$

6). Ordonați :

a). 0,831; 0,8(31); 0,83(1); $\frac{4}{5}$; b). 0,63; 0,633; 0,663; $\frac{7}{11}$; $\frac{19}{30}$; c). 0,36; 0,366; 0,336; $\frac{4}{11}$; $\frac{11}{30}$

7). Să se afle x din proporțiile :

a). $\frac{3}{x+4}=\frac{6}{8}$ R : $x=0$ b). $\frac{3x-4}{0{,}2}=\frac{\frac{5}{8}}{\left(-\frac{7}{8}\right)}$ R : $x=\frac{9}{7}$

c). $\frac{y+2}{3x-2}=\frac{30}{24}$, unde y este soluție pentru ecuația $5(y+1)=y+17$ R : $x=2$

8). Să se afle x din proporția:

a). $\frac{\overline{1aa}}{x}=\frac{125^3:\left(5^4\right)^2}{\left(\frac{1}{4}+1\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{2^3}{7}}$, unde $\overline{1aa}\,\vdots\,25$ R : 100; $x=40$

b). $\frac{\overline{a1b}}{36}=\frac{x+10}{4}$, unde $\overline{a1b}$ este cel mai mic număr divizibil cu 12. R : 126; $x=14$

9). Să se afle numerele naturale x și y dacă raportul lor este 4/6 și media lor aritmetică este 10. R: 12; 8

10). Să se afle numerele naturale a, b, c dacă sunt direct proporționale cu numerele 2, 6, 4 si $a+2c=45$.

11). Să se afle numerele naturale a, b, c dacă sunt invers proporționale cu 8, 3, 4 și (a, b) = 3.

12). Să se afle trei numere naturale a, b, c știind că media aritmetică a primelor două numere este 21, cel mai mare divizor comun al lui a și b este 7, iar primul și ultimul sunt direct proporționale cu 7 și 2.

13). Aflați a și b dacă sunt invers proporționale cu soluțiile ecuațiilor : $3x+4=16$, $2y-6=y$ iar $a+b$ este 15.

14). Arătaţi că, dacă numerele $\overline{ab}$ şi $\overline{ba}$ sunt direct proporţionale cu cifrele lor, atunci ele se divid cu 11.

15). Doi muncitori produc în 4 ore 120 piese. Ştiind că al doilea face singur în 5 ore, 70 piese, să se afle câte piese realizează primul lucrând singur în 6 ore ?

16). Două robinete umplu împreună un bazin în 6 ore. Ştiind că primul umple bazinul singur în 9 ore, aflaţi în câte ore umple bazinul singur al doilea robinet ?

17). Să se afle două numere naturale ştiind că unul dintre ele este cu 180 mai mic decât celălalt, diferenţa care reprezintă 40% din suma lor.

18). Să se afle ce sumă a depus o persoană la bancă cu 25% dobandă dacă are 58000000 lei la sfârşitul anului.

19). Să se afle preţul unei carţi dacă după două reduceri de preţ cu 10% şi 5%, costă 17100 lei.

20). Preţul unui ceas a fost redus de două ori cu 25% şi 10%. Dacă preţul intermediar a fost de 75000 lei, cât costă iniţial şi cât costă în final ?

21). Un drumeţ merge în prima zi 30% din drum, a doua zi 40% din rest şi în a treia zi restul de 8,4 km. Câţi km are drumul ?

22). Dacă numărul a este 50% din b, să se afle cât la sută reprezintă a din suma lor. Dar b din suma lor ?

23). Dacă numărul a este 30% din suma a + b să se afle cât la sută reprezintă b din a.

24). Să se calculeze :

a). $(-2)^3 \cdot 2^3 : 4^3 + (-1)^{19} =$ b). $[-4-(-7)] \cdot (-5) + (-3) \cdot (-4) \cdot (-1) =$

c). $[(-4)^2 + (-5) \cdot 3 + (-1)^4]^3 - 3^3 =$ d). $[(-15)^2 : (-3) + (-8)^2] : (-11) =$

e). $[(-3)^3 + (-5)^2] \cdot (-5)^2 + (-7)^2 =$ f). $[(-2)^8 \cdot 3]^6 : (-2)^{45} : 9 =$

25). Să se calculeze :

a). $(-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 + ... + (-1)^{50} =$ b). $(-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 + ... + (-1)^{99} =$

c). $(-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 + ... + (-1)^n =$ d). $(-1)^0 \cdot 0 + (-1)^1 \cdot 1 + ... + (-1)^{100} \cdot 100 =$

26). Să se calculeze :

a). $(|2^{33} - 3^{22}| + 2 \cdot 4^{16}) : 9^{11} =$

b). $[|5^{68} - 3^{102}| + |2^{153} - 3^{102}| - |3^{34} \cdot 9^{34} + 3^{102}| + |-25^{34}|] : (-4)^{76} =$

27). Să se calculeze :

a). $[(-2)^n + 2^n] : 2^n =$ b). $4^{101} + (-4)^{99} + 3 \cdot 4^{100} =$ c). $5^{67} + 3 \cdot 5^{66} - 2 \cdot 5^{68} =$

d). $(-5)^{2n} + 5^{2n+1} - 25^{n+1} =$ e). $8^n + 4^n \cdot 2^{n+2} - 2^{3n+2} =$

28). Să se arate că :

a). $(15^{n+1} + 3^n \cdot 5^{n+1} - 3^{n+2} \cdot 5^n) \vdots 11$ b). $(2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{60}) \vdots 105$

29). Să se compare :

a). 3^{136} cu $4^{104} - 3 \cdot 4^{103} - 3 \cdot 4^{102}$ R : I < II b). $(-6)^{18}$ cu $(-2)^{45}$ R : I > II

c). $(-3)^{18}$ cu $(-5)^{12}$ R : I > II d). $(-3)^9$ cu $(-5)^6$ R : I < II

e). $(-11)^{14}$ cu $(-5)^{21}$ R : I > II

30). Să se rezolve în Z:

a). $3 + x = -11$ R : -14 b). $x - 17 = 0$ R : $x = 17$ c). $x + 18 = 0$ R : -18

d). $x + 14 = -3$ R : -17 e). $4x = -8$ R : $x = -2$ f). $3x = -8$ R : $x \in \varnothing$

31). Să se rezolve în Z:

a). $2x + 1 = -4$ R : $x \in \varnothing$ b). $5x + 6 = -4$ R : $x = -2$

c). $3 + 2x = 5x + 9$ R : -2 d). $3(x + 2) + 7 = x + 3$ R : -5

e). $3 - 2 \cdot (x + 1) = 2 - x$ R : $x = -1$ f). $4x - 5[2(x + 1) - 3] = 5$ R : $x = 0$

g). $3 - 2\{4x - 5[3x - 2(x + 1)] + 1\} = 13 + 8x$ R : $x \in \varnothing$

32). Să se rezolve în Z :

a). $x \cdot y = 15$ b). $x(y + 1) = 5$ c). $x(x + 3) = 4$ d). $2x - yx = 7$ e). $2xy = x + 6$

33). Să se rezolve în Q:

a). $-10 : |x + 2| = -2$ R : $x = 3; x = -7$ b). $4 \cdot |x - 1| - 10 = 2 \cdot |x - 1|$ R : $x = 6; x = -4$

c). $|2x + 3| : (-2^2) = 8$ R : $x \in \varnothing$ d). $25 : |x + 3| - 12 = -7$ R : $x = 2; x = -8$

e). $|3x - 1| \cdot (-2) = -3\frac{1}{4}$ R : $x = \frac{5}{2}; x = \frac{11}{6}$ f). $21 : |2x + 1| = -2\frac{1}{3}$ R : $x \in \varnothing$

g). $||x| + 5| = 8$ R : $x = 3; x = -3$ h). $|2^x - 8| + |3y - 27| = 0$ R : $x = 3; y = 9$

i). $|x| + |y + 1| = 0$ R : $x = 0; y = -1$

34). Să se afle media aritmetică a numerelor :

a). 8 şi 72; b). 20 şi 45; c). 0,5 şi 2. R : a).40; b).32,5; c).1,25

35). O carte este deschisă la întâmplare. Stabiliţi numerele celor două pagini care le priviţi, dacă suma celor două pagini este 257.

36). Mama are 1250000 lei în bancnote de 50000 lei şi 100000 lei. Să se afle numărul de bancnote din fiecare fel ştiind că numărul total este de 15.

37). Tatăl lui Victor are de efectuat un anumit număr de piese. El trebuie să lucreze câte 25 piese pe zi pentru a le termina la data stabilită. Lucrând câte 45 piese, el le termină cu 4 zile mai devreme. Câte piese a avut de lucrat

38). Alina a cumpărat într-o zi 2 kg de mere 2 kg de prune, plătind 70000 lei. În altă zi a cumpărat, cu aceleaşi preţuri unitare, 3 kg mere şi 2 kg prune plătind în total 85000 lei. Câţi lei costă kilogramul din fiecare produs ?

39). Să se determine un număr natural ştiind că, scăzând din el o cincime, apoi o pătrime din rest se obţine 150.

40). Diana are o sumă de bani. În prima zi cheltuieşte o jumătate din sumă, a doua zi o treime din rest, a treia zi o jumătate din noul rest. După aceste cheltuieli îi mai rămân 10000 lei. Să se determine suma pe care Diana a avut-o de la început.

41). Ştefan cumpără 4 pixuri şi 5 gume, plătind 153000 lei. Ştiind că un pix costă cât 3 gume, să se afle cât costă un pix şi cât costă o gumă ?

42). Violeta cumpără 4 kg cartofi şi 3 kg roşii plătind 120000 lei. Să se afle cât costă 1 kg de cartofi ştiind că este de două ori mai ieftin decât 1 kg de roşii ?

43). Triplul unui număr adunat cu dublil celui de-al doilea dă suma 3024. Să se afle al doilea număr ştiind că el reprezintă dublul primului număr.

44). O echipă de 8 muncitori sapă un şanţ în 9 zile. În câte zile execută aceeaşi lucrare o echipă formată din 12 muncitori, dacă norma zilnică este aceeaşi ?

45). În 15 cutii sunt 2055 de bile. Câte bile sunt în 39 cutii ?

46). 23 cutii cu bomboane costă 2415000 lei. Cât costă 6 cutii cu bomboane ?

47). Dacă un avion de vânătoare a străbătut în 8 minute distanţa de 48 km, în câte minute va parcurge o distanţă de 60 km ?

48). Un automobil pleacă din localitatea A spre localitatea B şi merge cu 75 km/h. După două ore, un alt automobil care merge cu viteza de 90 km/h pleacă tot din A spre B. Ele ajung în acelaşi timp în localitatea B. Care e distanţa dintre cele două localităţi ?

49). Distanţa dintre cele două localităţi, A şi B, este de 60 km. Din aceste localităţi pleacă, în acelaşi timp, doi biciclişti unul spre celălalt. Primul are viteza de 9 km/h, iar celălalt 11 km/h.

După cât timp se întâlnesc şi la ce distanţă de oraşul A ? Dar de oraşul B ?

Testul 1

1). Puneţi semnul < sau > pentru a obţine propoziţii adevărate:

⑤p a). $-5 \ldots\ldots |-5|$ ⑤p b). $-3-4 \ldots\ldots -1$

2). Calculaţi :

⑤p a). $4-(8-10)$ ⑤p b). $-7-2\cdot(-3)$

3). Dacă $x \in Z$ şi :

⑤p a). $2x=-10 \Rightarrow x=\ldots\ldots$ ⑤p b). $x+8 \geq 0 \Rightarrow x \in \ldots\ldots$

⑦p 4). Valoarea absolută a numărului $3\cdot 8-4\cdot 7$ este ....

5). ⑦p a). $-14:(-2)-2^3=\ldots\ldots$ ⑦p b). $4-5x=19 \Rightarrow x=\ldots\ldots$

6). ⑨p a). Să se afle toate valorile întregi ale lui x, pentru care $2\cdot|x|-3 \leq 3$.

⑨p b). $[4:(|6-8|-6)+|-5|]^7:(-2)^{11}$

⑩p 7). Elementele mulţimii $\left\{x \in Z \,\middle|\, \frac{-6}{x} \in N\right\} \cup \left\{x \in Z \,\middle|\, \frac{2}{x} \in Z\right\}$ sunt ....

Testul 2

⑤p 1). Cel mai mare număr întreg negativ de 2 cifre este ....

⑤p 2). Să se reprezinte într-un sistem de axe ortogonale punctele : A(–2; 5); B(4; –3); C(–1; –6); D(0; 6).

3). Puneţi semnul < sau > pentru a obţine propoziţii adevărate :

⑤p a). $-5\cdot(-2) \ldots\ldots -10$ ⑤p b). $0 \ldots\ldots 4-9$

⑦p 4). Valoarea absolută a numărului : $x=(|-18|+|-4|):(-2)$ este ....

5). ⑦p a). Să se compare cel mai mic număr întreg de 2 cifre cu numărul (–100).

⑦p b). $(-6)^2-(-2)^5=\ldots\ldots$

⑨p 6). Să se rezolve în Z: $2(x-2)-\frac{3}{2}x=x-3$.

⑨p 7). Să se calculeze : $(-10):[(-3+5)\cdot(-2)+(-3)^2]-|-7+(-2)^3|:(-5+2)$.

⑩p 8). Să se determine $x \in Z$ astfel încât: $\frac{2x+5}{2x-1} \in Z$.

GEOMETRIE

Capitolul V

DREAPTA

NOŢIUNI DE BAZĂ

- un punct A aparţine dreptei a, adică $A \in a$ dacă punctul A se află pe dreapta a;
- două puncte distincte determină o singură dreaptă;
- se numesc puncte coliniare trei puncte sau mai multe puncte care se află pe o dreaptă;
- se numesc drepte concurente două drepte sau mai multe drepte care au un punct comun.

PROBLEME

*

1). Să se deseneze dreapta AB şi punctele C şi D astfel încât $C \in AB$ şi $D \notin AB$. Aflaţi $AB \cap CD$.

2). Fie figura alăturată : a). să se scrie cărei drepte aparţine fiecare punct; b). găsiţi toate punctele care să aparţină unei singure drepte; c). scrieţi punctele coliniare; d). daţi exemple de 4 puncte necoliniare şi trei din ele să fie coliniare; e). daţi exemple de 4 puncte necoliniare şi oricare dintre ele să fie coliniare.

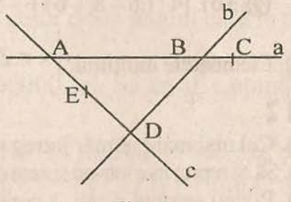


Fig. 1

**

3). Să se deseneze dreptele concurente AB şi CD astfel încât $AB \cap CD = \{C\}$ şi $E \in AB$, $E \neq A$, $E \neq B$, $E \neq C$. Care din următoarele afirmaţii sunt adevărate : a). $C \in AB$; b). $E \in CD$; c). $D \in AB$; d). $A \in CD$; e). $ED \cap AB = \{C\}$; $ED \cap CD = \{D\}$; g). $ED \cap AB = \{E\}$?

4). Să se deseneze dreptele concurente $AB \cap CD = \{O\}$ şi $E \in CD$. Care din următoarele afirmaţii sunt adevărate : a). $O \in AB$; b). $O \notin CD$; c). $E \in AB$; d). A, O, B puncte coliniare; e). A, B, C puncte coliniare; f). E, O, C, D puncte coliniare ?

5). Să se deseneze patru puncte astfel încât oricare trei dintre ele sunt coliniare. Cum sunt cele patru puncte ?

6). Să se deseneze patru puncte astfel încât doar trei dintre ele să fie coliniare. Câte drepte distincte se pot desena ?

7). Să se deseneze trei puncte necoliniare. Câte drepte distincte se pot construi ?

8). Să se deseneze trei drepte concurente, două câte două în punctele A, B, C şi $E \in AB$ şi $F \in EC$. Care din următoarele afirmaţii sunt adevărate : a). $B \in EA$; b). A, E, B puncte necoliniare; c). $F \in AB$; d). F, E, C puncte coliniare; e). A, B, C puncte coliniare ?

9). Să se ilustreze grafic dreptele a_1, a_2, a_3, a_4 ştiind ca sunt satisfăcute simultan relaţiile :

a). $a_1 \cap a_2 = \{A\}$ b). $a_1 \cap a_4 = \{D\}$ c). $a_2 \cap a_3 = \{B\}$

d). $a_3 \cap a_4 = \{B\}$ e). $C \in a_3$ f). A, C, D puncte coliniare

10). Să se deseneze figura geometrică pentru care sunt satisfăcute simultan relaţiile: a). $A, C \in d$; b). A, B, D puncte coliniare distincte două câte două, în această ordine; c). D, C, E puncte coliniare, în această ordine; d). $B \notin d$;

i). Cum sunt dreptele d şi BD dacă $B \in d$?

ii). Să se scrie toate dreptele concurente cu BE şi punctele lor de intersecţie.

Semidrepte şi segmente

NOŢIUNI DE BAZĂ

- se numeşte semidreaptă o porţiune dintr-o dreaptă mărginită într-o parte şi prelungită la nesfârşit în cealaltă parte.

Marginea se numeşte originea semidreptei şi se notează : [OA semidreapta închisă adică $O \in$ [OA, O originea semidreptei, A

un punct oarecare de pe semidreaptă şi (OA semidreaptă deschisă adică O ∉ (OA.
- (OA şi (OB se numesc semidrepte opuse dacă A, O, B sunt puncte coliniare în această ordine
- se numeşte segment o porţiune dintr-o dreaptă, mărginită în ambele părţi. Deci un segment are două capete.
- se noteaza : [AB] = segment închis , A, B ∈ [AB] şi (AB) = segment deschis , A, B ∉ (AB).
- segmentul (AA) = ø este segmentul ,nul.
- [AA] = {A}.

PROBLEME

*

1). Ţinând cont de figura 2, să se afle valoarea de adevăr a propoziţiilor :

a). B ∈ a b). D ∈ a
c). C ∈ b d). D ∉ d
e). B ∉ [AB f). C ∈ [AC
g). [AC ⊂ a h). BD ∩ a = {B}
i). A ∉ b j). a ∩ b = {C}
k). A, B, C puncte coliniare

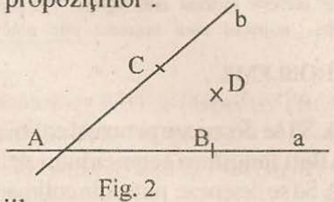


Fig. 2

2). Priviţi figura 3 şi precizaţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a). A ∈ [BC] b). G ∈ [AE]
c). D ∈ [EC d). C ∈ [DE]
e). B ∈ (AC f). E ∈ AF
g). G ∉ [ED h). F ∈ (AE
i). E ∈ [FA j). C ∉ [AE
k). C ∈ [BA l). E ∈ DC

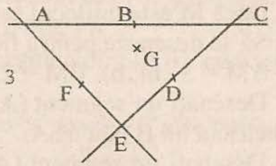


Fig. 3

**

3). Fie punctele A, C, B, D, E coliniare, în această ordine. Să se afle valoarea de adevar a propoziţiilor:

a). [AC = [AE = [AD b). (BC = [CB c). A ∈ (DE
d). B ∉ (BA e). [AC = [ED f). [BC ⊂ [BA
g). (DE ⊂ (AC h). [CD ⊂ (CE i). (CB ∩ (BC = (CB)
j). [AC ∩ [DB = (BC) k). [AB ∩ [EA = [AE]

4). Desenaţi semidreptele (BA, (BC, (BD ştiind ca (BA şi (BC sunt opuse. Cercetaţi dacă : a). B ∈ [CD]; b). B ∈[AC]; c). A∈ (CB; d). C ∈ (BA; e). D ∈ [AC]; f). C ∈ (AB. Cum vor fi punctele A, B şi D dacă C ∈ (BD ?

5). Desenaţi semidreptele (BA, (BD şi (BC astfel încât D ∈ [AC]. Cercetaţi dacă: a). C ∈ (AD; b). C ∈ [AD]; c). D ∈ (AC; d). B ∈ (DC; e). A∈ [CD]; f). A, D, C puncte coliniare.

Pentru exerciţiile de mai jos, desenaţi toate cazurile posibile care îndeplinesc condiţiile date şi menţionaţi ordinea punctelor :

6). [AB] ⊂ (DC); A, B, C, D puncte coliniare
7). (AB ⊂ (CD şi B ∈ [AD]; A, B, C, D puncte coliniare
8). [BC ⊂ [AC; A, B, C puncte coliniare
9). (BC) ∩ (BA = ø; A, B, C puncte coliniare
10). A ∈ (CB; A, B, C puncte coliniare
11). [AC] ⊂ [BC; A, B, C puncte coliniare
12). [AC] ∩ [BD = [BC]; A, B, C, D puncte coliniare
13). [AC ∩ [BD] = [BD], D ∈ [AC]; A, B, C, D puncte coliniare
14). (CA ∩ [BD] = ø; A, B, C, D puncte coliniare
15). [CD ⊂ (AB, D ∉ [CB]; C ∈ [AB]; A, B, C, D puncte coliniare
16). [CD ⊂ (AB, C ∈ [BD]; A, B, C, D puncte coliniare

Lungimea unui segment. Operaţii cu segmente.
Mijlocul unui segment

NOŢIUNI DE BAZĂ

- numim distanţa dintre două puncte A şi B, lungimea segmentului AB.
- se numesc segmente congruente două segmente care au aceeaşi lungime
- în figura alăturată definim : AC segmentul sumă AC = AB + BC

AB segmentul diferenţă AB = AC – BC

- se numeşte mijlocul unui segment AB, punctul M ∈ [AB], care împarte segmentul în două segmente congruente (AM) ≡ (MB)

Obs. : mijlocul unui segment este unic.

PROBLEME

*

1). Să se deseneze punctele coliniare A, B, C în această ordine, astfel încât AB = 6 cm, BC = 2 cm. Aflaţi lungimea segmentului AC.

2). Să se deseneze punctele coliniare A, B, C în această ordine, astfel încât AB = 7,2 cm şi AC = 9,1 cm. Să se afle lungimea segmentului BC.

3). Dacă M este mijlocul segmentului (AB) şi AM = 3,25 cm, să se afle MB şi AB.

4). Să se deseneze pentru fiecare caz segmentul (AB), dacă M este mijlocul lui şi avem : a). AM = 3 cm; b). BM = 2,5 cm.

5). Desenaţi un segment (AB) de lungime 5 cm şi construiţi simetricul lui A faţă de B şi simetricul lui B faţă de A.

6). Desenaţi un segment (AB) de lungime 8 cm şi C ∈ (AB) cu AC = 3 cm. Construiţi simetricele lui C faţă de A şi B.

7). Desenaţi un segment (AB) şi C mijlocul lui. Ce este punctul B pentru punctul A ? Dar punctul A pentru punctul B ?

**

8). Să se deseneze punctele coliniare M, N, P astfel încât MN = 7 cm, MP = 5 cm, NP = 2 cm. În ce ordine sunt aşezate punctele ?

9). Să se deseneze punctele coliniare S, R, T astfel încât SR = 2 cm şi ST = 5 cm. Aflaţi lungimea segmentului RT. Câte soluţii are problema ?

10). Să se deseneze punctele coliniare A, B, C, D în această ordine astfel încât AB = 2 cm, AC = 7 cm; AD = 10 cm. Să se afle lungimile segmentelor BC, CD, BD.

11). Să se deseneze punctele coliniare E, F, G, H în această ordine, astfel încât EH = 12 cm, EG = 10 cm, FH = 5 cm. Să se afle lungimile segmentelor GH, FG, EF.

12). A, P, R, B, E sunt puncte coliniare în această ordine, astfel încât AP = 2 cm, AR = 7 cm, PB = 8 cm, PE = 12 cm. Să se afle lungimile segmentelor PR, RB, BE, RE, AB, AE.

13). ÿn figura 4 se cunosc : AE = 22 cm, AB = 9 cm, BD = 4 cm, AC ≡ BD, DF = 5 cm. Să se afle lungimile segmentelor DE, FE, AC, CB. Găsiţi toate perechile de segmente congruente.

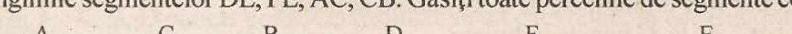


Fig. 4

14). În figura 5 se cunosc : AF = 15 cm; AB ≡ CE; ED ≡ DF şi BC ≡ CD; AB = 2 cm.

a). Să se afle lungimile segmentelor BC; CE; ED; DF.

b). Ce reprezintă D pentru segmentul [EF] ?

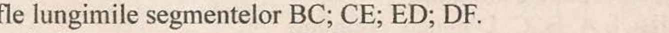


Fig. 5

15). În figura 6 se cunosc : [AB] ≡ [BC], [CE] ≡ [EF], AF = 18 cm şi lungimea segmentului EC este cu 1 cm mai mare decât cea a segmentului BC. a). Să se afle AB şi CE; b). Ce

reprezintă punctele B şi E pentru segmentele AC şi respectiv CF ?

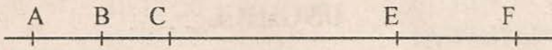


Fig. 6

16). Verificaţi relaţiile de mai jos privind figura 7. Corectaţi greşelile apărute.

a). MN = MP + NP b). MP = MQ – PQ c). NP = PQ + MN

d). MQ = MP + NQ e). NQ = MQ – MN f). MN = MQ – (PQ + PN)

g). PM = MN + PQ h). PQ = NQ – NP i). MN + NQ = MP + PQ

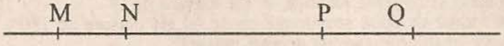


Fig. 7

17). Fie A, B, C puncte coliniare şi M, N mijloacele segmentelor (AB) şi respectiv (BC). Dacă AM = 3 cm, NC = 3,5 cm, să se afle lungimile segmentelor AB, BC şi AC.

18). Fie R, S, T puncte coliniare şi M, N mijloacele segmentelor (RS) şi (ST). Dacă RS = 4 cm, RT = 12 cm, să se afle lungimile segmentelor ST, RM, NT, MN.

19). Desenaţi A, B, C puncte coliniare, M, N, P mijloacele segmentelor (AB), (BC) şi respectiv (AC), cunoscând AM = 5 cm, MC = 11 cm. Aflaţi AB, BC, AC, MP, PN.

20). Aflaţi MN dacă cunoaştem AC = 14 cm, M, N mijloacele segmentelor (AB), respectiv (BC), unde A, B, C puncte coliniare..

21). În figura 8 : AB = 5 cm, BC = 4 cm, AD = 13 cm. Să se arate ca punctul C este mijlocul segmentului (BD).

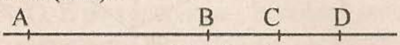


Fig. 8

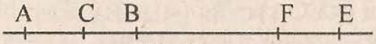


Fig. 9

22). În figura 9 : AE = 12 cm, AF = 10 cm, CF = 7 cm, (AC) ≡ (CB). Să se afle EF, BF, AC şi să se arate ca punctul B este mijlocul segmentului (AE).

23). Să se deseneze punctele coliniare A, B, D, C în această ordine, astfel încât AB = 3 cm, BC = 7 cm, BD = 2 cm. a). Să se afle AD, DC, AC. b). Ce reprezintă punctul D pentru segmentul (AC)? c). Fie M, N mijloacele segmentelor (BD) respectiv (DC). Să se afle BM, AM, CN, BN, NM, AN.

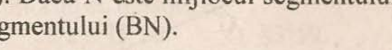
24). Fie A, B, C, D puncte coliniare, în această ordine şi M mijlocul segmentului (AB), C mijlocul segmentului (BD), astfel încât AM = 2 cm, BD = 8 cm. Să se afle : a). AB, MC, MD, AD; b). distanţa de la mijlocul segmentului (AC) la mijlocul segmentului (CD).

25). Fie A, B, C, D puncte coliniare în această ordine, astfel încât AB = 4 cm, AC = 9 cm, AD = 16 cm. a). Să se figureze mijloacele segmentelor (AB), (BC), (CD), (BD), (AC); b). Să se afle distanţa dintre mijloacele segmentelor (AB) şi (BD).

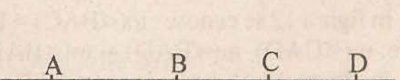
26). Fie A, B, C, D puncte coliniare şi AB = 6 cm, (AB) ≡ (BC) şi C este mijlocul segmentului (BD). Să se afle AD.

27). Fie punctele A, B, C coliniare şi M mijlocul segmentului (AB), iar B mijlocul segmentului (AC). Dacă AM = 3 cm, să se afle : a). MC şi AC; b). Dacă N este mijlocul segmentului (BC), să se afle la ce distanţa de M se afle mijlocul segmentului (BN).

28). A, B şi C sunt trei localităţi situate pe un drum naţional astfel încât d(A; B) = 2 · d(B; C) şi d(A; C) = 120 km. Aflaţi d(A; B).



29). A, B, C şi D sunt patru pomi plantaţi în linie dreaptă. Prunul se află la mijloc, între păr şi cais, iar d(A; B) : d(C; D) = 2 rest 3 m şi d(A; C) = 15 m. Aflaţi distanţa de la măr la cais.



Capitolul VI
UNGHIUL

NOŢIUNI DE BAZĂ

- se numeşte unghi figura geometrică formată din două semidrepte care au aceeaşi origine.
- cele două semidrepte se numesc laturi şi originea comună este vârful unghiului
- a măsura un unghi înseamnă a măsura „deschiderea" dintre semidreptele care formează unghiul
- unitatea de măsură este gradul cu submultiplii : minutul, secunda $1^0 = 60'$ şi $1' = 60''$.
- unghiul nul este format din două semidrepte identice, el are măsura de 0^0
- unghiul alungit este unghiul format de două semidrepte opuse, el are măsura de 180^0
- se numesc unghiuri congruente unghiurile care au aceeaşi măsură
- se numesc unghiuri adiacente două unghiuri care au o latură comună, vârful comun şi celelalte laturi de o parte şi de alta a laturii comune
- se numesc unghiuri complementare două unghiuri care au suma de 90^0
- se numesc unghiuri suplementare două unghiuri care au suma de 180^0

EXERCIŢII ŞI PROBLEME

**

1). Enumeraţi unghiurile diferite de pe desen şi găsiţi valoarea logică a următoarelor propoziţii:

a). semidreapta (OE este exterioară (∢AOB)
b). semidreapta (OD este interioară (∢EOC)
c). semidreapta (OC este interioară (∢DOE)
d). D ∈ int (∢EOC)
e). int (∢EOA) ⊂ int (∢DOB)
f). int (∢COB) ⊂ int (∢DOB)
g). int (∢DOC) ⊂ ext (∢DOA)
h). int (∢EOA) ∪ int (∢DOE) = int (∢DOA) – (OE
i). int (∢EOC) – int (∢DOC) = int (∢DOE) ∪ (OD
j). int (∢AOB) ∩ int (∢EOB) = int (∢AOB)
k). int (∢EOC) ∩ int (∢DOA) = int (∢DOE)
l). ext (∢AOB) ∩ ext (∢AOC) = int (∢COB)
m). ext (∢AOD) ∩ int (∢EOB) = int (∢AOB)

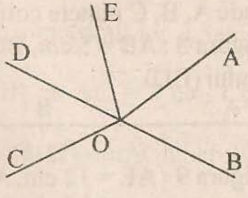


Fig. 10

2). În câte moduri se pot denumi unghiurile din figura 11 ?

Aflaţi : a). int (∢BAC) ∪ int (∢CAE) b). int (∢EAG) – int (∢FAG)
c). ext (∢BAF) ∩ int (∢FAD) d). ext (∢GAE) ∩ int (∢FAD)

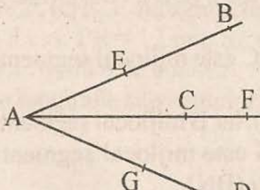


Fig. 11

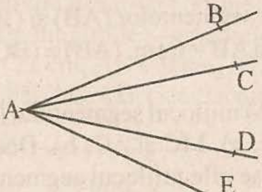


Fig. 12

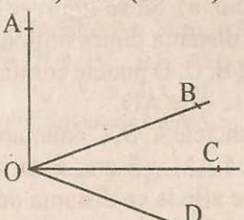


Fig. 13

3). În figura 12 se cunosc : m(∢BAC) = $18^0 30'$; m(∢CAE) = $45^0 30'$; m(∢DAE) = $17^0 45'$. Să se afle: m(∢CAD), m(∢BAD) şi m(∢BAE).

4). În figura 13 se cunosc : m(∢AOB) = 55^0; m(∢BOD) = 90^0; ∢BOD ≡ ∢AOC. Să se afle : m(∢COD) şi m(∢AOD).

5). Să se calculeze :

a). $43^{0} - 27^{0}30' =$ d). $17^{0}20' - 9^{0}11' =$ g). $102^{0} - 53^{0}43'38'' =$

b). $108^{0} - 59^{0}45' =$ e). $83^{0}17' - 17^{0}45' =$ h). $17^{0}38'59'' + 45^{0}56'18'' =$

c). $32^{0}17' - 29^{0} =$ f). $100^{0}30' - 99^{0}45'30'' =$ i). $20^{0} - 3^{0}17'5'' + 14^{0}38'56'' =$

j). $14^{0}23' + 15^{0}41'56'' - 25^{0}45'58'' =$

6). Calculaţi :

a). $12^{0}13' \cdot 3 =$ b). $15^{0}28'30'' \cdot 4 =$ c). $25^{0}12'43'' \cdot 2 =$

d). $58'130'' \cdot 4 =$ e). $3^{0}58'' \cdot 16 =$ f). $125^{0} : 2 =$

g). $18^{0}33' : 4 =$ h). $15^{0}49'18'' : 2 =$ i). $24^{0}38'10'' : 5 =$

j). $17^{0}32' \cdot 3 : 2 =$

7). Să se transforme în grade, minute, secunde :

a). 15624" ; b). 104328" ; c). 6245" ; d). 1325" ; e). 1945'260" ; f). 8725'343"

8). i). Să se ilustreze grafic unghiurile :

a). $m(\sphericalangle POR) = 28^{0}$ b). $m(\sphericalangle LOM) = 77^{0}$ c). $m(\sphericalangle SOP) = 114^{0}$

d). $m(\sphericalangle DOE) = 76^{0}60'$ e). $m(\sphericalangle JOP) = 27^{0}59'60''$ f). $m(\sphericalangle TOS) = 113^{0}58'120''$

ii). Care din unghiurile de mai sus sunt congruente ?

9). Construiţi următoarele unghiuri şi precizaţi care sunt congruente :

a). $m(\sphericalangle BAC) = 30^{0}$ $m(\sphericalangle CAD) = 44^{0}60'$ (AC $\in$ int ($\sphericalangle$BAD)

b). $m(\sphericalangle MON) = 29^{0}59'60''$ $m(\sphericalangle NOP) = 43^{0}119'60''$ (ON $\in$ int ($\sphericalangle$MOP)

c). $m(\sphericalangle GEF) = 29^{0}60'$ $m(\sphericalangle KEG) = 45^{0}$ (EG $\notin$ ext ($\sphericalangle$FEK)

Aflaţi $m(\sphericalangle BAD)$; $m(\sphericalangle MOP)$; $m(\sphericalangle FEK)$.

10). Fie A, O, E puncte coliniare, în această ordine. Semidreptele (OB şi (OC împart $\sphericalangle$AOE în trei unghiuri congruente şi (OD $\in$ int ($\sphericalangle$COE) astfel încât $m(\sphericalangle DOE) = 20^{0}$. Să se afle $m(\sphericalangle COD)$ şi $m(\sphericalangle BOD)$.

Unghiuri adiacente, complementare, suplementare

*

1). Să se deseneze unghiurile $\sphericalangle$BAC şi $\sphericalangle$CAD adiacente astfel incat $m(\sphericalangle BAC) = 45^{0}$ şi $m(\sphericalangle CAD) = 27^{0}$. Să se afle $m(\sphericalangle BAD)$.

2). Să se deseneze unghiurile $\sphericalangle$BAC şi $\sphericalangle$CAD adiacente astfel încât $m(\sphericalangle BAC) = 38^{0}$ şi $m(\sphericalangle BAD) = 70^{0}$. Să se afle $m(\sphericalangle CAD)$.

3). Să se deseneze unghiul $\sphericalangle$ABC, $m(\sphericalangle ABC) = 60^{0}$ şi (BD interioară unghiului astfel încât $m(\sphericalangle CBD) = 25^{0}$. Să se afle $m(\sphericalangle ABD)$.

4). Să se deseneze unghiul $\sphericalangle$ABC, $m(\sphericalangle ABC) = 81^{0}$ şi (BD exterioară unghiului astfel încât $m(\sphericalangle DBC) = 30^{0}$. Să se afle $m(\sphericalangle ABD)$.

**

5). Să se deseneze unghiul $\sphericalangle$ABC, $m(\sphericalangle ABC) = 25^{0}$ şi (BD exterioară unghiului astfel încât $m(\sphericalangle ABD) = 45^{0}$. Să se afle $m(\sphericalangle DBC)$; câte soluţii sunt ?

6). Calculaţi complementele şi suplementele pentru unghiurile cu măsurile :

a). 32^{0} b). 51^{0} c). 87 d). $15^{0}45'$ e). $17^{0}38$ f). $83^{0}59'$

g). $48^{0}15'15''$ h). $73^{0}48'72''$ i). $7^{0}8'13'$ j). $34^{0}15''$ k) 58" l). 1376"

7). Precizaţi perechile de unghiuri complementare având măsurile de mai jos :

a). $(35^{0}; 55^{0})$ b). $(12^{0}13'; 77^{0}47')$

c). $(13^{0}15'14''; 77^{0}44'46'')$ d). $(28^{0}19'; 47^{0}51')$

8). Precizaţi perechile de unghiuri suplementare având măsurile de mai jos :

a). $(108^{0}; 71^{0})$ b). $(95^{0}17'; 84^{0}43')$

c). $(102^{0}13'56''; 17^{0}18'24'')$ d). $(170^{0}17'8''; 576'412'')$

9). Cercetaţi dacă următoarele perechi de unghiuri sunt complementare sau suplementare :
a). m(∢MNP) = 117° şi m(∢STQ) = 62°60'
b). m(∢DGH) = 89°120' şi m(∢LKJ) = 89°
c). m(∢PQR) = 37°59'60" şi m(∢ABC) = 53°
d). m(∢DEF) = 348'79" şi m(∢MNL) = 84°10'41"
10). Fie semidreptele (OA, (OB şi (OC astfel încât (OC ∈ int (∢AOB). Precizaţi dacă punctele A, O, B sunt coliniare, pentru fiecare caz :
a). m(∢AOC) = 90° şi m(∢COB) = 89°60'
b). m(∢AOC) = 37°40'15' şi m(∢BOC) = 152°19'45"
c). m(∢AOC) = 108°14'83" şi m(∢BOC) = 72°44'47"
d). m(∢BOC) = 340'500" şi m(∢AOC) = 174°11'40"
11). Să se deseneze unghiurile adiacente complementare ∢ABD şi ∢DBC,astfel încât m(∢ABD) = 11°.
12). Să se deseneze unghiurile adiacente suplementare ∢ABC şi ∢CBD, astfel încât m(∢CBD) = 115°.
13). Să se afle măsura unghiului al cărui suplement este de 4 ori mai mare decât el.
14). Să se afle măsura unghiului al cărui complement este de 2 ori mai mic decât el.
***
15). Să se deseneze unghiurile neadiacente complementare ∢ABC şi ∢ABD astfel încât m(∢ABC) = 25°.
16). Să se deseneze unghiurile neadiacente suplementare ∢ABC şi ∢CBD astfel încât m(∢ABC) = 120°.
17). Să se deseneze unghiurile neadiacente complementare ∢ABC şi ∢ABE astfel încât m(∢CBE) = 10°.
18). Să se deseneze unghiurile neadiacente suplementare ∢ABC şi ∢ABD astfel încât m(∢CBD) = 2 · m(∢ABC).

Bisectoarea unui unghi
Unghi drept, ascuţit, obtuz.
Unghiuri opuse la vârf

NOŢIUNI DE BAZĂ

- se numeşte bisectoarea unui unghi semidreapta cu originea în vârful unghiului, situată în interiorul unghiului şi care formează, cu laturile unghiului iniţial unghiuri congruente
- se numeşte unghi drept orice unghi congruent cu suplementul său
- se numeşte unghi ascuţit orice unghi cu măsura mai mică de 90°
- se numeşte unghi obtuz orice unghi cu măsura cuprinsă între 90° şi 180°
- suma măsurilor unghiurilor formate în jurul unui punct este 360°
- se numesc unghiuri opuse la vârf două unghiuri cu acelaşi vârf şi laturile unuia sunt în prelungirea laturilor celuilalt.
- dacă două unghiuri sunt opuse la vârf atunci ele sunt congruente

EXERCIŢII ŞI PROBLEME

*

1). Să se deseneze unghiurile ∢ABC şi ∢CBD adiacente astfel încât m(∢ABC) = 44° şi ∢CBD este unghi drept. Să se afle m(∢ABD).

**

2). Să se deseneze unghiurile ∢ABC şi ∢CBD neadiacente astfel încât m(∢ABC) = 25° şi ∢CBD este unghi drept. Să se afle m(∢ABD).
3). Să se deseneze unghiurile ∢ABC şi ∢CBD adiacente, ∢ABC este unghi drept, m(∢CBD) = 50°. (BE este bisectoarea unghiului ∢ABC. Să se afle m(∢ABD) şi m(∢EBD).
4). Să se deseneze unghiurile ∢ABC şi ∢CBD adiacente; ∢ABC este unghi drept şi 4∢ABD) = 112°. (BE este bisectoarea unghiului ∢CBD. Să se afle m(∢DBC); m(∢DBE) şi m(∢ABE).
5). Fie ∢ABC unghi drept şi (BD interioară unghiului astfel încât m(∢ABD) = 66°. (BE este

bisectoarea unghiului ∢DBC. Să se afle m(∢DBC) şi m(∢ABE).

6). Fie ∢AOC şi ∢COD adiacente suplementare iar O ∈ (BE) astfel încât (OB este bisectoarea unghiului ∢AOC, m(∢COD) = 60^0. Să se afle: a). m(∢AOE); b). m(∢EOD); c). măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor ∢COD şi ∢AOE.

7). Să se afle măsura unui unghi ştiind că este cu 40^0 mai mare decât complementul său.

8). Să se afle măsura unui unghi ştiind că este cu 26^0 mai mic decât suplementul său.

9). Fie ∢AOB şi ∢COD unghiuri opuse la vârf. AC ∩ BD = {O}. Dacă m(∢AOB) = 27^0, să se afle m(∢COD); m(∢AOD) şi m(∢BOC).

10). În fiecare din figurile următoare, punctele A, O, B sunt coliniare şi semidreptele punctate sunt bisectoare. Aflaţi unghiurile necunoscute.

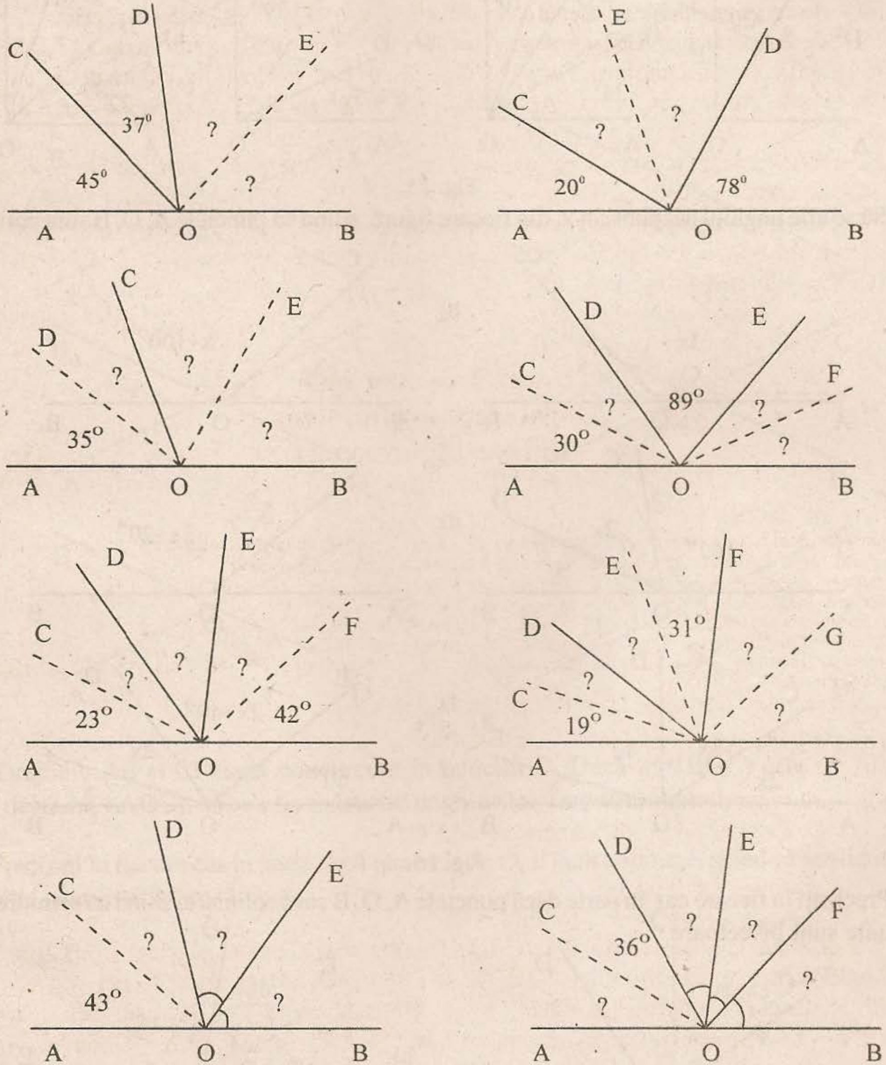


Fig. 14

11). În fiecare din figurile următoare, m(∢AOB) = 90⁰ şi semidreptele punctate sunt bisectoare. Aflaţi unghiurile necunoscute.

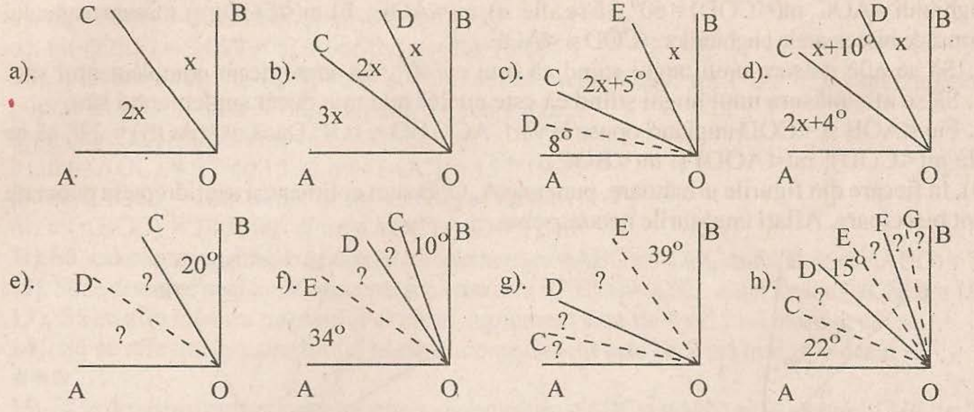


Fig. 15

12). Să se afle unghiul necunoscut x, din fiecare figură, ştiind că punctele A, O, B sunt coliniare.

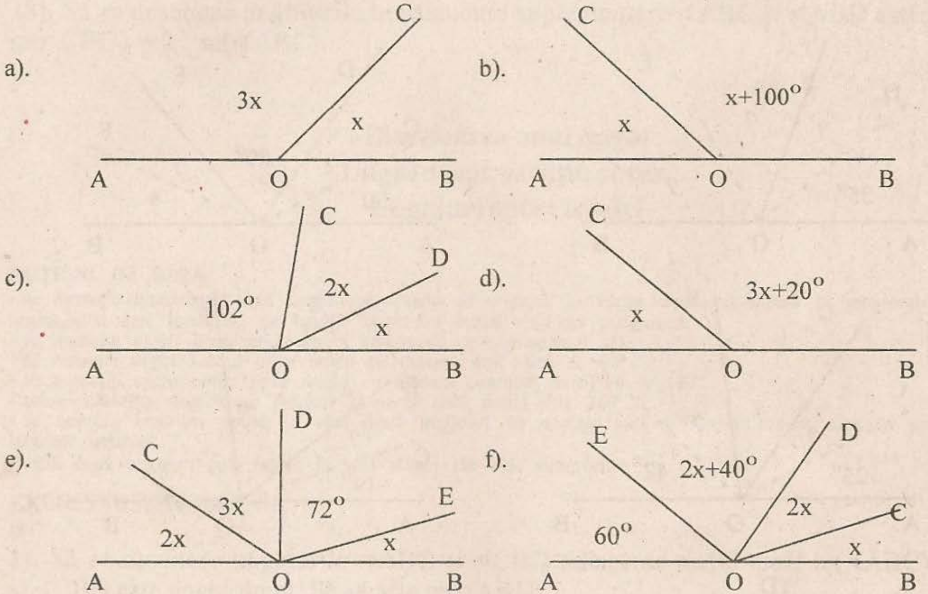
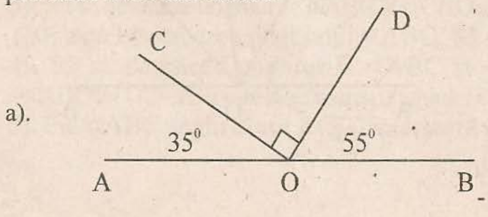
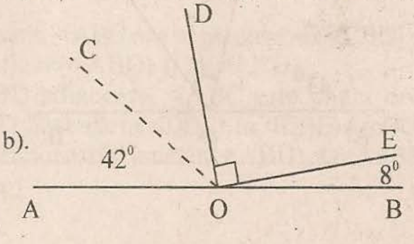
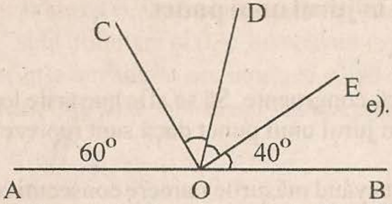


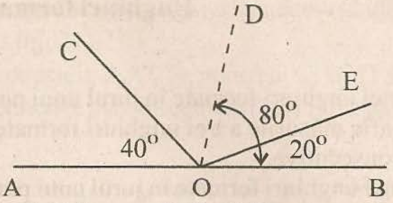
Fig. 16

13). Precizaţi în fiecare caz în parte dacă punctele A, O, B sunt coliniare, ştiind că semidreptele punctate sunt bisectoare.





c). 

e). 

14). Să se afle unghiurile necunoscute ştiind că A, O, C şi respectiv B, O, D sunt puncte coliniare.

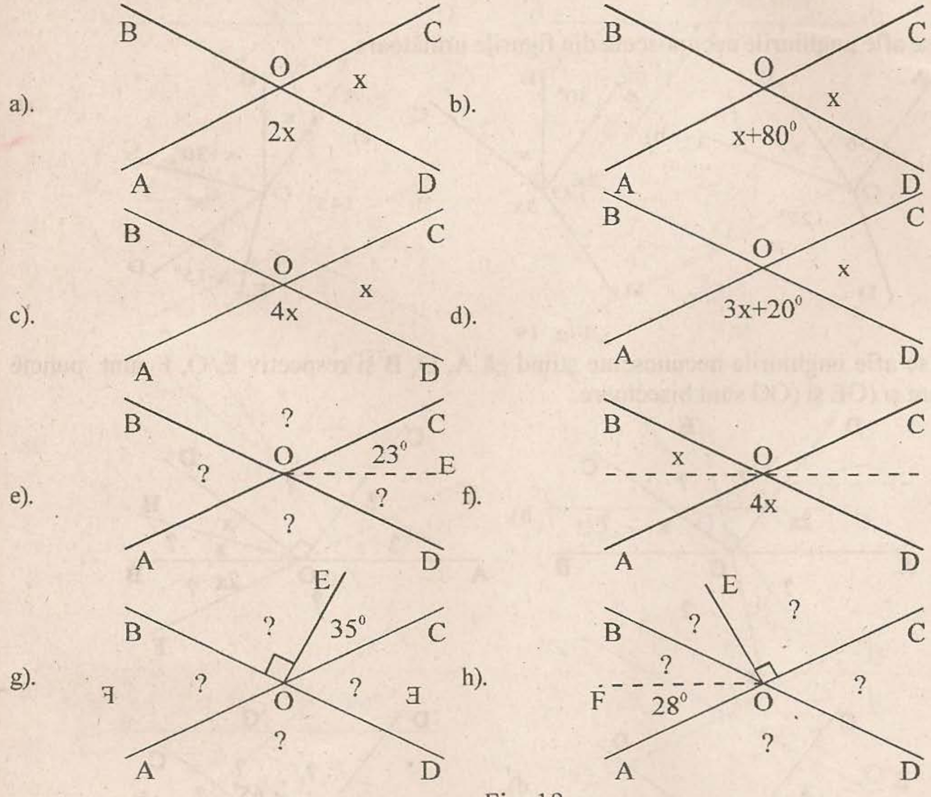
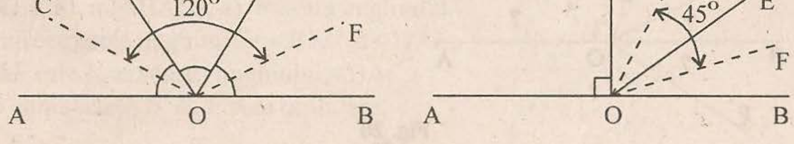


Fig. 18

15). Dreptele AB şi CD sunt concurente în punctul O. Dacă m(∢BOC) este cu 70° mai mare decât m(∢AOC), să se afle măsurile unghiurilor care s-au format.

***

16). Precizaţi în fiecare caz în parte dacă punctele A, O, B sunt coliniare, ştiind că semidreptele punctate sunt bisectoare.



Unghiuri formate în jurul unui punct

*

1). Fie cinci unghiuri formate în jurul unui punct, congruente. Să se afle masurile lor.

2). Să se afle măsurile a trei unghiuri formate în jurul unui punct dacă sunt reprezentate de numere consecutive.

3). Fie cinci unghiuri formate în jurul unui punct având măsurile numere consecutive. Aflaţi măsurile lor.

**

4). Să se afle unghiurile necunoscute din figurile următoare :

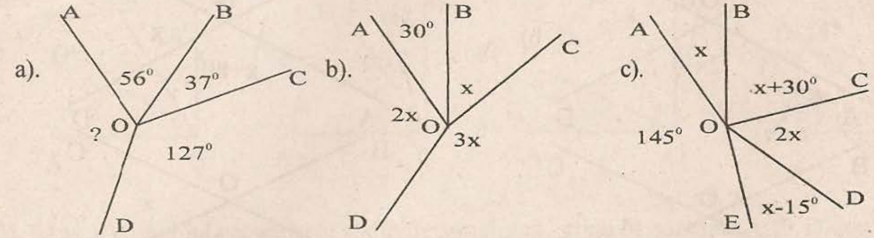


Fig. 19

5). Să se afle unghiurile necunoscute ştiind că A, O, B şi respectiv E, O, F sunt puncte coliniare şi (OE şi (OG sunt bisectoare.

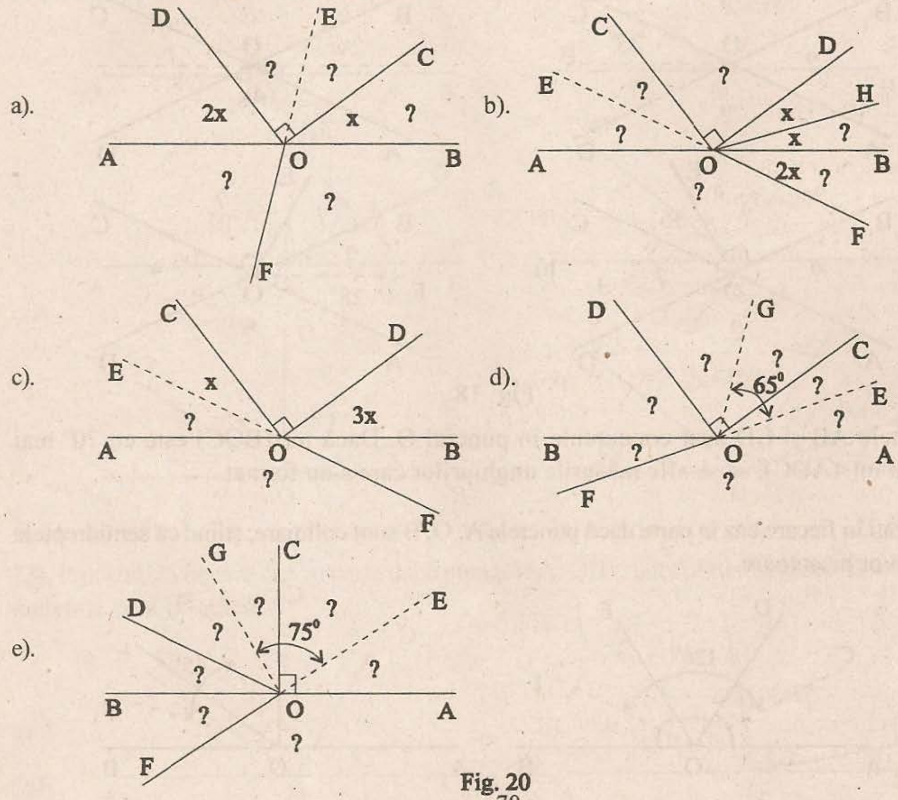
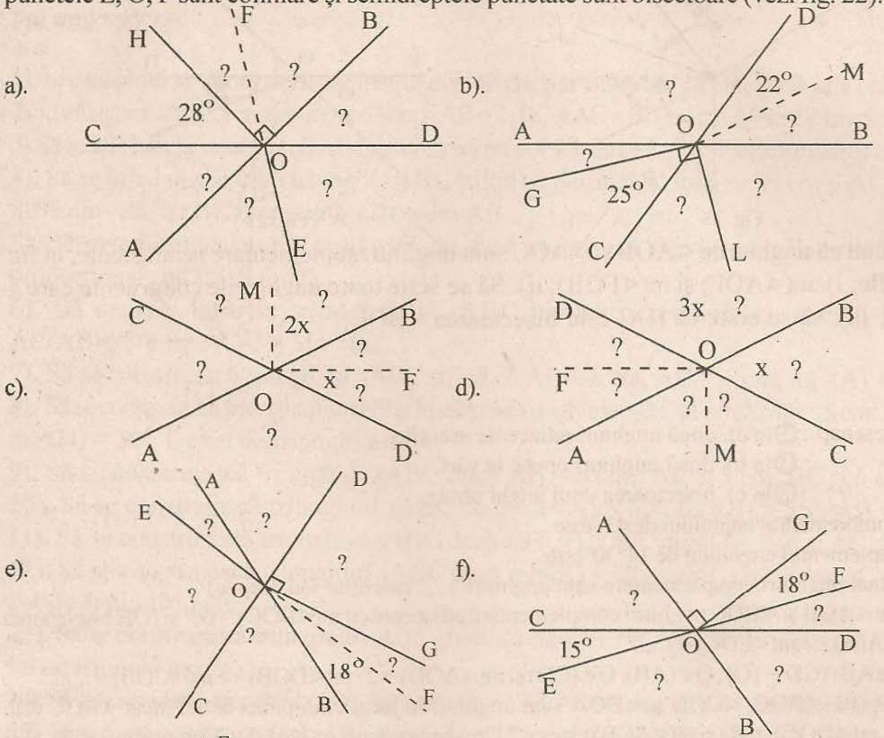


Fig. 20

6). Să se arate că B, O, D sunt puncte coliniare şi să se afle unghiurile necunoscute, ştiind că A, O, C sunt coliniare şi (OE bisectoare (vezi fig. 21).

7). Să se afle unghiurile necunoscute ştiind că punctele A, O, B; punctele C, O, D şi respectiv punctele E, O, F sunt coliniare şi semidreptele punctate sunt bisectoare (vezi fig. 22).



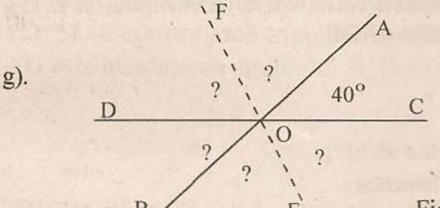


Fig. 22

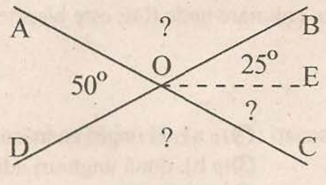


Fig. 21

8). a). Ştiind că (OE şi (OF sunt bisectoare, să se afle unghiul necunoscut în fig. 24.

9). Fie ∢BAC, ∢CAD, ∢DAE şi ∢EAB unghiuri formate în jurul unui punct astfel încât (AD ∈ int(∢CAE). Ştiind că m(∢BAC) = 60°, m(∢CAD) = 20° şi m(∢CAE) = 150° să se afle:
a). m(∢BAE); b). m(∢BAD); c). măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor ∢BAC şi ∢DAE;
d). dacă (AF este bisectoarea unghiului ∢BAC, să se arate că punctele E, A, F sunt coliniare.

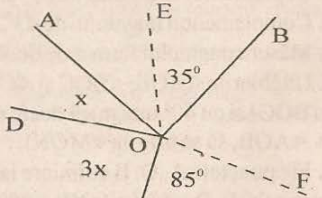


Fig. 24

***

10). Ştiind că semidreptele punctate din fig. 23 sunt bisectoare, să se afle m(∢MOS), m(∢GOS).

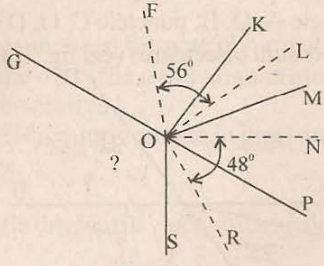


Fig. 23

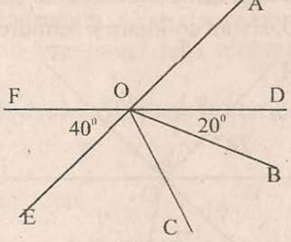


Fig. 25

11). b). Ştiind că unghiurile ∢AOB şi ∢AOC sunt unghiuri suplementare neadiacente, în fig. 25 să se afle: i). m(∢AOF) şi m(∢FOB); ii). Să se scrie toate unghiurile congruente care s-au format; iii). să se arate că (OC este bisectoarea ∢BOE.

Testul 1

1). Desenaţi : ⑤1p a). două unghiuri adiacente ascuţite.

⑤1p b). două unghiuri opuse la vârf.

⑤1p c). bisectoarea unui unghi obtuz.

⑤1p 2). Complementul unghiului de 43^0 este ....

⑦1p 3). Suplementul unghiului de $14^0 30'$ este ....

⑦1p 4). Două unghiuri complementare sunt unghiuri .... (ascuţite sau obtuze)

⑨1p 5). Fie ∢AOB şi ∢BOC unghiuri complementare adiacente cu m(∢BOC) = 66^0 şi (OE bisectoarea unghiului ∢AOB => m(∢EOC) = ...

⑨1p 6). Fie AB∩CD = {O}, O∈(AB), O∈(CD) şi m(∢AOD) = 2 · m(∢DOB) => m(∢COB) = ...

⑩1p 7). ∢AOB, ∢BOC, ∢COD şi ∢DOA sunt unghiuri în jurul unui punct astfel încât ∢BOC este unghi drept, m(∢DOC) = 21^0 şi m(∢AOB) este cu 27^0 mai mare decât m(∢AOD). Demonstraţi că D, O şi E sunt puncte coliniare unde (OE este bisectoarea unghiului ∢AOB.

Testul 2

1). Desenaţi : ⑤1p a). un unghi cu măsura de 110^0.

⑤1p b). două unghiuri adiacente suplementare.

⑤1p c). bisectoarea unghiului având măsura de 40^0.

⑤1p 2). Suplementul unghiului de 82^0 are măsura de ....

⑦1p 3). Complementul unghiului de $43^0 24' 16''$ are măsura de ......

⑦1p 4). Măsura unghiului format de două unghiuri adiacente complementare este egală cu ....

⑨1p 5). Unghiurile ∢AOB, ∢BOC şi ∢COA sunt unghiuri formate în jurul unui punct. Dacă m(∢AOB) = 2 · m(∢BOC) şi cu 40^0 mai mică decât m(∢AOC), (ON şi (OM sunt bisectoarele unghiurilor ∢AOC respectiv ∢AOB, să se afle m(∢MON).

⑩1p 6). Fie punctele A, O, B coliniare iar C, D şi E de aceeaşi parte a dreptei AB astfel încât (OD este bisectoarea ∢COE. Dacă m(∢AOC) = 80^0 şi m(∢DOB) = 70^0, să se afle m(∢COE).

⑨1p 7). Să se afle măsurile unghiurilor ∢AOB şi ∢BOC adiacente complementare dacă m(∢AOB) este de 5 ori mai mare decât m(∢BOC).

Capitolul VII
CONGRUENŢA TRIUNGHIURILOR
Construcţia triunghiurilor

PROBLEME

******

1). În triunghiul $\triangle PQR$ isoscel, perimetrul este 42 cm şi o latura are 15 cm. Să se afle celelalte laturi.

2). În triunghiul $\triangle ABC$, perimetrul este 64 cm şi $AB = 2 \cdot BC$ şi $AC = BC + 4$ cm. Să se afle laturile triunghiului.

3). Să se afle laturile unui triunghi dacă sunt direct proporţionale cu 4; 5; 8 şi perimetrul este 68 cm.

4). Să se afle laturile unui triunghi $\triangle ABC$ ştiind că perimetrul lui este 39 cm şi AC reprezintă 80% din AB, iar BC reprezintă 120% din AB.

5). Să se determine laturile unui triunghi dacă perimetrul este 94 cm şi laturile sunt invers proporţionale cu 1,2; 0,9; 1,5.

6). Să se afle laturile triunghiului $\triangle ABC$ pentru care perimetrul este 147 cm şi $AC/AB = 5/8$ iar $AC/2 = 3/4 \cdot BC$.

7). Să se construiască triunghiul $\triangle ABC$ ştiind că AB = 6 cm, AC = 5 cm, $m(\sphericalangle A) = 70^0$.

8). Să se construiască triunghiul $\triangle MNP$ şi bisectoarea unghiului $\sphericalangle N$, ştiind că MN = 8 cm, NP = 8 cm, $m(\sphericalangle N) = 30^0$. Ce fel de triunghi este ?

9). Să se construiască triunghiul $\triangle ABC$ dacă AB = 6 cm, AC = 3 cm, BC = 5 cm.

10). Să se construiască triunghiul $\triangle ABC$ dacă $m(\sphericalangle A) = 60^0$, $m(\sphericalangle B) = 35^0$, AB = 6 cm.

11). Să se construiască triunghiul $\triangle ABC$ dacă $m(\sphericalangle A) = 50^0$, $m(\sphericalangle C) = 50^0$ şi AC = 4 cm.

12). Să se construiască triunghiul $\triangle ABC$ dacă $m(\sphericalangle B) = 40^0$, $m(\sphericalangle C) = 20^0$ iar BC = 8 cm. Ce fel de triunghi este ?

13). Să se construiască triunghiul $\triangle ABC$ ştiind că $m(\sphericalangle B) = 90^0$, $m(\sphericalangle C) = 20^0$ şi BC = 4 cm. Ce fel de triunghi este ?

14). Să se construiască triunghiul $\triangle ABC$ dacă $m(\sphericalangle C) = 130^0$, AC = 4 cm şi CB = 4 cm. Ce fel de triunghi este ?

15). Să se construiască triunghiul $\triangle ABC$ ştiind că AB = 6 cm, AC = 6 cm, BC = 6 cm. Ce fel de triunghi este ?

16). Să se construiască triunghiul $\triangle ABC$ cu AC = 5 cm, $m(\sphericalangle A) = 40^0$ iar AD = 8 cm unde AD este bisectoarea unghiului A, $D \in (BC)$.

Cazurile de congruenţă a triunghiurilor

NOŢIUNI DE BAZĂ

- se disting trei cazuri de congruenţă :

i). cazul L.U.L.: două triunghiuri oarecare care au câte două laturi şi unghiul cuprins între ele respectiv congruente, sunt congruente;

ii).cazul U.L.U. : două triunghiuri oarecare care au câte o latură şi unghiurile alăturate ei respectiv congruente, sunt congruente;

iii). cazul L.L.L. : două triunghiuri oarecare care au laturile respectiv congruente, sunt congruente.

- pentru a dovedi că două segmente (două unghiuri) sunt congruente, căutăm să încadrăm segmentele (unghiurile) respective în două triunghiuri a căror congruenţă poate fi demonstrată.

PROBLEME

*****

1). În figura 26 : A, O, B şi respectiv C, O, D sunt puncte coliniare, astfel încât AO = 5 cm, OB = 5 cm, $m(\sphericalangle OAC) = m(\sphericalangle OBD) = 90^0$, să se arate că : a). $\triangle AOC \equiv \triangle BOD$; b). [OC] ≡ [OD]; c). [AC] ≡ [DB]; d). $\triangle COB \equiv \triangle DOA$.

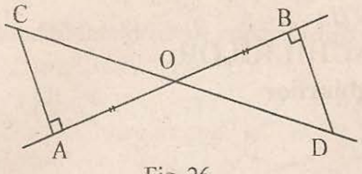


Fig. 26

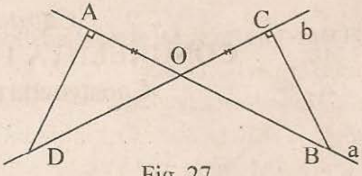


Fig. 27

2). În figura 27 se ştie că $a \cap b = \{O\}$ şi A, B ∈ a; C, D ∈ b astfel încât OA = 6 cm, OC = 6 cm, m(∢OAD) = m(∢OCB) = 90^0. Să se arate că : a). ΔAOD ≡ ΔCOB; b). [OD] ≡ [OB]; c). [AD] ≡ [CB].

3). Pe laturile unui unghi cu vârful C (vezi fig. 28) se aleg punctele A şi B astfel încât [CA] ≡ [CB] şi se duce bisectoarea unghiului care se intersecteaza cu [AB] în O. Să se arate că : a). ΔCOB ≡ ΔCOA; b). [OB] ≡ [OA]; c). ∢A ≡ ∢B; d). ∢COB ≡ ∢COA.

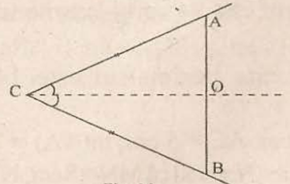


Fig. 28

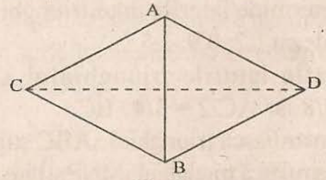


Fig. 29

4). Dacă două triunghiuri echilaterale ΔABC şi ΔABD au o latură comună, atunci ele sunt congruente. (Justificaţi)

******

5). Pe laturile unui triunghi ΔABC isoscel ([AB] ≡ [AC]) se construiesc în afară ΔABD şi ΔACE echilaterale. Să se arate că ΔABD ≡ ΔACE.

6). În figura 29 : ΔABC şi ΔABD echilaterale au latura AB comună. Cercetaţi ce fel de triunghiuri sunt ΔACD şi ΔBCD.

7). Pe cercul de centru O din figura 30 se aleg două puncte A şi B şi fie M mijlocul lui [AB]. Să se arate că ΔOMA ≡ ΔOMB.

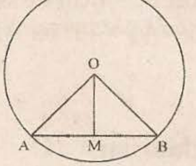


Fig. 30

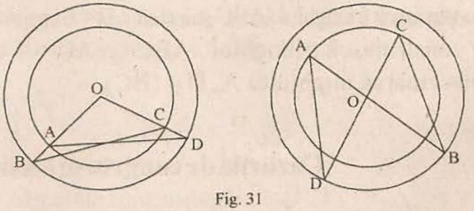


Fig. 31

8). Cercurile din figura 31 sunt concentrice şi A, O, B şi respectiv C, O, D sunt puncte coliniare. Să se arate în fiecare caz în parte că : a). ΔOBC ≡ ΔODA; b). [CB] ≡ [DA]; c). [AB] ≡ [CD]; d) ce fel de triunghiuri sunt ΔOBD şi ΔOAC ?

9). Pe cele două drepte concurente a şi b din figura 32, $a \cap b = \{O\}$, se aleg A, B ∈ a şi C, D ∈ b

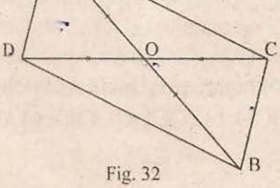


Fig. 32

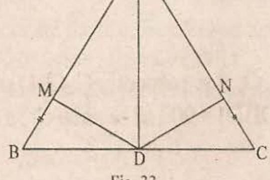


Fig. 33

astfel încât [AO] ≡ [OB] şi [CO] ≡ [OD]. Arătaţi că : a). ∆BOD ≡ ∆AOC; b). ∆COB ≡ ∆DOA.

10). În figura 33 : ∆ABC isoscel cu [AB] ≡ [AC] şi M ∈ [AB] şi N ∈ [AC] astfel încât [BM] ≡ [NC], AD bisectoarea unghiului ∢A. Să se arate că : a). [AM] ≡ [AN]; b). ∆AMD ≡ ∆AND.

11). În exteriorul ∆ABC isoscel din figura 34, [AB] ≡ [AC] se aleg punctele D şi E astfel încât ∢DAM ≡ ∢EAM, unde AM este bisectoarea unghiului A, şi [AE] ≡ [AD]. Să se arate că : a). ∢DAB ≡ ∢EAC; b). ∆DAB ≡ ∆EAC.

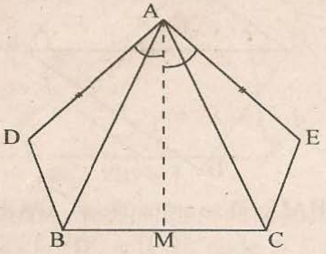


Fig. 34

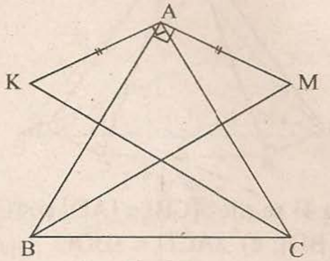


Fig. 35

12). În figura 35 : ∆ABC isoscel, [AB] ≡ [AC] şi m(∢MAB) = m(∢KAC) = 90^0, [AM] ≡ [AK]. Să se arate că : a). ∆AMB ≡ ∆AKC; b). [MB] ≡ [KC].

13). În figura 36 : ∆ABC isoscel, [AB] ≡ [AC] şi m(∢MAC) = m(∢NAB) = 90^0, [AN] ≡ [AM]. Să se arate că : a). ∆ABN ≡ ∆ACM; b). [NB] ≡ [MC].

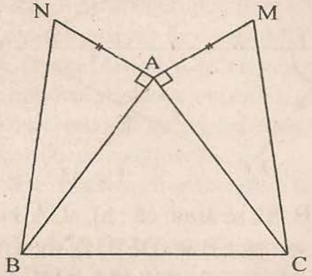


Fig. 36

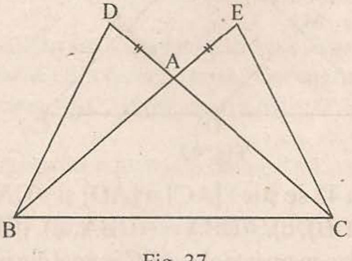


Fig. 37

14). Laturile congruente ale unui triunghi isoscel ABC, [AB] ≡ [AC] se prelungesc ca în figura 37, cu două segmente congruente [AE] ≡ [AD] astfel încât A ∈ [EB] şi A ∈ [DC]. Arătaţi că : a). ∆ADB ≡ ∆AEC b). [DB] ≡ [EC].

15). Pe laturile unui unghi cu vârful în A, se aleg punctele B, D, C şi E astfel încât [AD] ≡ [AB] şi [AE] ≡ [AC], ca în figura 38. Să se arate că : a). ∆ADC ≡ ∆ABE; b). ∢OED ≡ ∢OCB, [BC] ≡ [DE], [BE] ≡ [CD]; c). ∆BOC ≡ ∆DOE, unde BE ∩ CD = {O}.

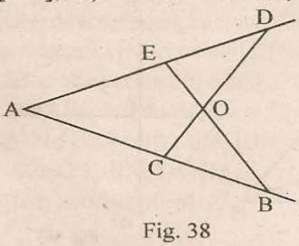


Fig. 38

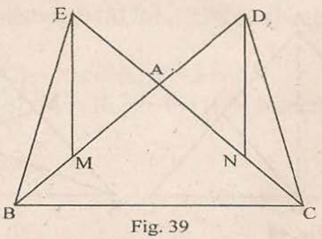


Fig. 39

16). În figura 39 : fie M şi N mijloacele laturilor AB şi AC ale triunghiului isoscel ∆ABC şi

[AD] ≡ [AE] prelungirile acestor laturi.(A ∈ [BD], A ∈ [CE]). Să se arate că :
a). ΔAND ≡ ΔAME; b). [EM] ≡ [DN]; c). ΔDNC ≡ ΔEMB.

17). În figura 40 : ΔABC isoscel, [AB] ≡ [AC], m(∢NCA) = m(∢MBA) = 90°, [CN] ≡ [MB]. Arătaţi că : a). ∢ABM ≡ ∢ACN; b). [AN] ≡ [AM]; c). cum este ΔAMN ?

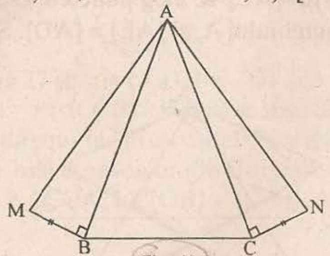


Fig. 40

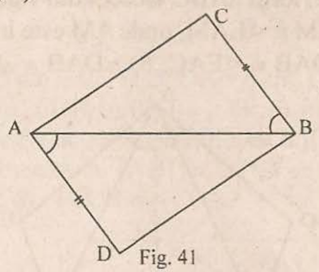


Fig. 41

18). În figura 41 se ştie : [CB] ≡ [AD] şi ∢CBA ≡ ∢BAD. Să se arate că : a). ΔACB ≡ ΔBDA; b). [AC] ≡ [BD]; c). ΔACD ≡ ΔBDC.

19). În ΔABC isoscel, [AB] ≡ [AC], din figura 42, se consideră M, N mijloacele laturilor [AB] şi [AC], iar AD bisectoarea unghiului ∢A. Arătaţi că : a). ΔAMD ≡ ΔAND; b). [MD] ≡ [ND]; c). ∢AMD ≡ ∢AND; d). ∢BMD ≡ ∢CND; e). ΔBMD ≡ ΔCND.

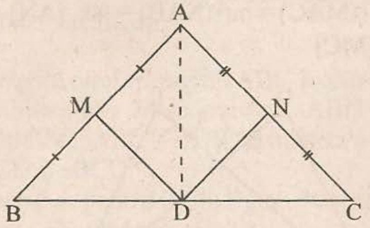


Fig. 42

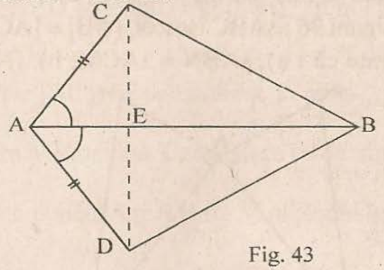


Fig. 43

20). În figura 43 se ştie : [AC] ≡ [AD] şi ∢CAB ≡ ∢DAB. Să se arate că : a). ΔCAB ≡ ΔDAB; b). [CB] ≡ [DB]; c). ∢CBA ≡ ∢DBA; d). [CE] ≡ [DE]; e). ΔCEB ≡ ΔDEB; f). m(∢AEC) = ?

21). Pe laturile congruente ale ΔABC isoscel din figura 44 ([AB] ≡ [AC]), se aleg M ∈ (AB) şi N ∈ (AC) astfel încât [AM] ≡ [AN] şi se duce bisectoarea unghiului ∢A, notată AD. Să se arate : a). ΔAMD ≡ ΔAND; b). [MD] ≡ [ND]; c). ∢AMD ≡ ∢AND; d). [MB] ≡ [NC]; e). ∢BMD ≡ ∢CND; f). ΔBMD ≡ ΔCND.

22). Fie ΔABC isoscel din figura 45, [AB] ≡ [AC], M ∈ (AC) şi N ∈ (AC) astfel încât [AM] ≡ [AN]. Arătaţi că : a). ΔANB ≡ ΔAMC; b). ∢ANB ≡ ∢AMC; c). [MC] ≡ [NB]; d). [MB] ≡ [NC]; e). ∢BMC ≡ ∢CNB; f). ΔBMC ≡ ΔCNB.

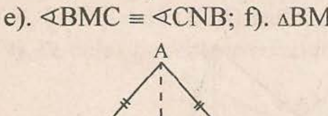


Fig. 44

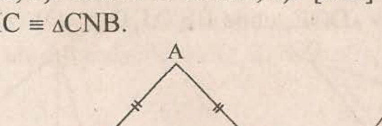


Fig. 45

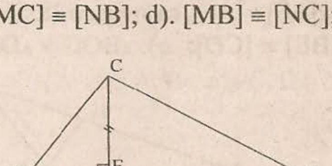


Fig. 46

23). În figura 46, se ştie că m(∢AEC) = 90° şi [CE] ≡ [ED]. Să se arate : a). ΔAEC ≡ ΔAED;

b). [AC] ≡ [AD]; c). ΔACB ≡ ΔADB; d). ce fel este ΔACD ? ; e). dar ΔCBD ?

24). În ΔABC din figura 47 se ştie AB = 4 cm, AC = 7 cm, BC = 8 cm şi AD bisectoarea unghiului ∢A, E ∈ (AC) astfel încât [AE] ≡ [AB]. Să se arate că : a). ΔABD ≡ ΔAED; b).[BD] ≡ [DE]; c). perimetrul ΔABC d). perimetrul ΔDEC.

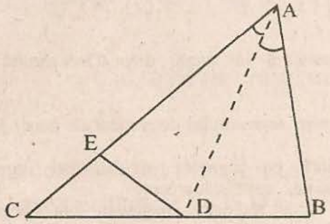


Fig. 47

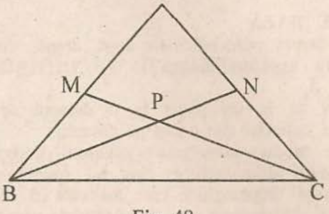


Fig. 48

25). În ΔABC isoscel din figura 48 se ştie că : [AB] ≡ [AC], [AM] ≡ [AN], N ∈ (AC), M ∈ (AB). Să se arate că [BP] ≡ [PC], unde {P} = BN ∩ MC.

Testul 1

⑤2p **1).** Fie ΔABC ≡ ΔDEF. Dacă AB = 5 cm, m(∢A) = 80^0, EF = 7 cm, m(∢F) = 50^0, atunci :
a). DE = ...; b). BC = ...; c). m(∢D) = ...; d). m(∢C) = ...

⑤1p **2).** Un triunghi echilateral cu perimetrul de 3,6 cm are lungimea laturii egală cu ....

⑤1p **3).** Dacă ΔABC are perimetrul de 15 cm, AB = 6 cm, AC = 3 cm atunci triunghiul este ....

⑦2p **4).** Precizaţi cazurile de congruenţă :
a). În ΔABC isoscel, [AB] ≡ [AC], fie D mijlocul lui BC : ΔABD ≡ ΔACD conform cazului de congruenţă ....
b). O este mijlocul segmentelor (AC) şi (BD), ΔAOB ≡ ΔCOD conform cazului de congruenţă ....
c). O ∈ (CD) şi O este mijlocul segmentului (AB) astfel încât m(∢ACO) = 90^0, m(∢ODB) = 90^0, ΔACO ≡ ΔBDO conform cazului de congruenţă ....

⑨2p **5).** Să se construiască un triunghi şi bisectoarele unghiurilor sale când se cunosc P = 12 cm, AB = 5 cm, AC = 4 cm.

⑩1p **6).** Fie A, B, C puncte coliniare astfel încât AB = 5 cm, BC = 3 cm, m(∢DBC) = 90^0, E ∈ (DB), DB = 5 cm, ED = 2 cm. Demonstraţi că [AE] ≡ [DC].

Testul 2

⑤2p **1).** Să se construiască ΔABC care are AB = 10 cm, BC = 8 cm şi AC = 6 cm.

⑤1p **2).** Să se construiască ΔABC care are AB = 5 cm, m(∢A) = 28^0, m(∢B) = 75^0.

⑤1p **3).** Să se construiască ΔDEF care are DE = 4 cm, EF = 6 cm şi m(∢E) = 90^0.

⑨1p **4).** Fie AB = 10 cm. Din punctul O, mijlocul său, se construiesc, în acelaşi semiplan, segmentele (OM) şi (ON) de aceeaşi lungime, astfel încât (ON este bisectoarea ∢AOM şi (OM este bisectoarea ∢NOB. Să se demonstreze că [MA] ≡ [NB] şi [NA] ≡ [MB].

⑨1p **5).** Să se afle perimetrul triunghiul ABC care are AB = 10 cm şi BC = 6 cm.

6). În ΔABC se cunosc BC = 12 cm, AB = 9 cm şi AC = 10 cm. Fie (BM bisectoarea ∢ABC, M ∈ (AC) şi N ∈ (BC) astfel încât [BN] ≡ [BA].

⑦2p a). Arătaţi că ΔBNM ≡ ΔBAM.

⑩1p b). Aflaţi perimetrul ΔMNC.

Capitolul VIII

PERPENDICULARITATE ÎN PLAN

Drepte perpendiculare. Construcţia triunghiurilor dreptunghice.

NOŢIUNI DE BAZĂ

- se numesc drepte perpendiculare două drepte concurente care formează un unghi drept. Deci rezultă că se formează patru unghiuri drepte.
- notaţie : $d_1 \perp d_2$
- prin distanţa de la un punct la o dreaptă se înţelege lungimea segmentului determinat de punct şi piciorul perpendicularei coborâte din punct pe dreaptă .
- se numeşte mediatoarea unui segment dreapta perpendiculară pe segment în mijlocul segmentului.
- două triunghiuri dreptunghice care au catetele respectiv congruente, sunt congruente
- două triunghiuri dreptunghice care au câte o catetă şi un unghi ascuţit respectiv congruente sunt congruente.
- două triunghiuri dreptunghice care au ipotenuzele congruente şi câte unul din unghiurile ascuţite congruente sunt congruente.
- două triunghiuri dreptunghice care au ipotenuzele şi câte o catetă respectiv congruente sunt congruente.

PROBLEME

*

1). Fie unghiul ∢AOB şi (OC ∈ int (∢AOB); (OE şi (OF bisectoarele unghiurilor ∢AOC şi ∢COB. Cercetaţi dacă OA⊥OB în fiecare caz :

a). m(∢AOC) = 17^0 şi m(∢COB) = 73^0 b). m(∢AOC) = $3^0 15'$ şi m(∢COB) = $87^0 45'$

c). m(∢AOC) = $84^0 15' 14''$ şi m(∢COB) = $5^0 44' 46''$ d). m(∢AOE) = 30^0 şi m(∢BOC) = 30^0

e). m(∢AOE) = $25^0 40'$ şi m(∢BOC) = $38^0 40'$ f). m(∢EOC) = $5^0 18' 20''$ şi m(∢FOB) = $39^0 41' 40''$

g). m(∢EOF) = 45^0

**

2). Dacă două unghiuri sunt adiacente suplementare, să se arate că bisectoarele lor sunt perpendiculare.

3). Fie punctele A, O, B coliniare şi punctele C, D, E, F de aceeaşi parte a dreptei AB astfel încât ∢BOC ≡ ∢COD ≡ ∢FOA; m(∢DOE) = 62^0 şi m(∢EOF) = m(∢FOA) + 6^0. Să se arate că OC⊥OE.

4). Fie AO⊥OC şi (OF bisectoarea unghiului ∢AOC; E ∈ OF astfel încât O ∈ (EF). Să se afle m(∢AOE).

5). Se dau unghiurile ∢AOD; ∢DOB; ∢BOE; ∢EOC şi ∢COA formate în jurul unui punct astfel încât punctele B, O, C sunt coliniare, AO⊥BC, m(∢AOE) = 160^0; OE⊥OD. Să se afle m(∢COE) şi măsura unghiului format de (OD cu bisectoarea unghiului ∢EOC.

6). Dacă unghiurile ∢AOB şi ∢AOC sunt neadiacente complementare, m(∢AOB) = 30^0 şi unghiurile ∢COA şi ∢COD sunt neadiacente suplementare, să se arate că OD⊥OB.

7). Fie AC ∩ BD = {O}, OE⊥DB astfel încât (OC este bisectoarea unghiului ∢BOE. Să se afle măsurile unghiurilor ∢EOC; ∢COB; ∢DOE; ∢DOA; ∢BOA.

8). Fie ∢AOB; ∢BOC; ∢COD; ∢DOE; ∢EOF; ∢FOA şase unghiuri congruente, formate în jurul unui punct. Dacă (OM, (ON sunt bisectoarele unghiurilor ∢AOB şi ∢DOE, să se arate că: a). M, O, N puncte coliniare; C, O, F coliniare; A, O, D coliniare; b). MN⊥FC.

9). Fie unghiurile ∢AOB şi ∢AOC unghiuri neadiacente suplementare, m(∢AOB) = 54^0. Dacă (OE este bisectoarea unghiului ∢BOC, să se arate că OE⊥OA.

10). Fie unghiurile ∢AOB şi ∢AOC unghiuri neadiacente complementare, m(∢AOB) = 20^0. Se consideră semidreapta (OD astfel încât m(∢COD) = 40^0 şi semidreapta (OC ∈ int (∢AOD). Dacă (OE este bisectoarea unghiului ∢COD, să se arate că OD⊥OB şi OA⊥OE.

11). Fie unghiurile ∢AOB şi ∢AOC neadiacente suplementare, unghiurile ∢AOE şi ∢AOB adiacente complementare, m(∢AOB) = 45^0 . Să se arate că : a). BO⊥OC; b). E, O, C puncte coliniare.

12). Fie punctele A, O, B coliniare şi E, D, C puncte de aceeaşi parte a dreptei AB astfel încât EO⊥OC, m(∢BOC) = 40^0 şi m(∢COD) = 25^0. Dacă (OF este bisectoarea unghiului ∢EOA să se arate că OD⊥OF.

13). Fie ∢AOB; ∢BOC; ∢COD; ∢DOE; ∢EOF şi ∢FOA unghiuri formate în jurul unui punct astfel încât m(∢AOB) = 80^0, m(∢BOC) = 50^0, m(∢EOD) este jumătate din m(∢AOB), m(∢FOE) = 30^0 şi AO⊥OF. Dacă (OM şi (ON sunt bisectoarele unghiurilor ∢AOB şi ∢DOE, să se arate că : a). OC⊥OM; b). OC⊥ON; c). M, N, O puncte coliniare.

Cazurile de congruenţă ale triunghiurilor dreptunghice

*

1). Să se construiască triunghiul ΔDEF cu DE = 7,5 cm, m(∢D) = 45^0 şi m(∢E) = 70^0. Să se construiască distanţele de la D la EF, de la E la FD şi de la F la DE.

2). Să se construiască triunghiul ΔFEG cu FE = 6 cm, m(∢F) = 30^0 şi m(∢E) = 40^0. Să se construiască distanţele de la F la EG, de la E la FG şi de la G la FE.

**

3). Pe laturile congruente ale ΔABC isoscel din figura 49 ([AB] ≡ [AC]), se duc perpendicularele AE⊥AB, AD⊥AC astfel încât [AD] ≡ [AE]. Arătaţi că : a). ∢DAB ≡ ∢EAC; b). ΔDAB ≡ ΔEAC; c). [DB] ≡ [EC]; d). (DC) ≡ (BE).

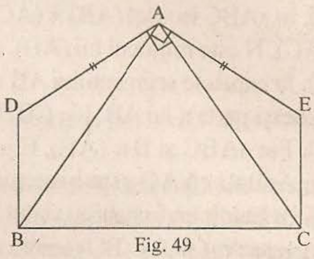


Fig. 49

4). Să se construiască triunghiurile dreptunghice, dacă se cunosc :

a). ΔABC : AB = 5 cm, m(∢B) = 30^0, m(∢A) = 90^0;

b). ΔABC : AB = 3 cm, m(∢A) = 70^0, m(∢B) = 90^0;

c). ΔABC : CB = 5 cm, AC = 3 cm, m(∢C) = 90^0;

d). ΔABC : AB = 6 cm,[AB] ≡ [AC], m(∢A) = 90^0;

e). ΔABC : AC = 8 cm, m(∢C) = 30^0, m(∢B) = 90^0;

f). ΔABC : AB = 10 cm, m(∢A) = 45^0, m(∢C) = 90^0;

5). Pe drepte concurente a ∩ b = {O} se aleg A, B ∈ a şi C, D ∈ b astfel încât O ∈ (AB) şi O ∈ (CD), AD⊥OD, CB⊥OB, [OC] ≡ [OA]. Demonstraţi că ΔAOD ≡ ΔCOB.

6). Pe laturile unghiului ∢XOY, fie C ∈ (OX şi A ∈ (OY astfel încât [OC] ≡ [OA] şi se duc CB⊥OY şi AD⊥OX, B ∈ (OY, D ∈ (OX. Să se arate că ΔOCB ≡ ΔODA şi ΔDMC ≡ ΔBAM, {M} = AD ∩ BC.

7). În ΔABC isoscel, (AB) ≡ (AC) se duce AD⊥BC, D ∈ (BC). Demonstraţi că D este mijlocul lui (BC).

8). De aceeaşi parte a dreptei AB se aleg punctele C şi D astfel încât (AC) ≡ (DB) şi m(∢ACB) = m(∢BDA) = 90^0. Arătaţi că : a). (BC) ≡ (AD); b). (CO) ≡ (DO), unde {O} = AD ∩ CB.

9). Fie C şi D puncte de o parte şi de alta a dreptei a astfel încât d(C; a) = d(D; a). Dacă {O} = CD ∩ a, demonstraţi că O este mijlocul lui CD.

10). Fie ΔABC isoscel cu (AB) ≡ (AC) şi M mijlocul lui (BC). Demonstraţi că AM⊥BC.

11). În ΔABC se duce AD⊥BC şi se ştie că D este mijlocul lui (BC). Demonstraţi că ΔABC este isoscel.

12). Pe laturile unui unghi ∢xOy se aleg A ∈ Ox, B ∈ Oy astfel încât (OA) ≡ (OB). Dacă M, N ∈ int ∢(xOy) astfel încât MA⊥Ox, NB⊥Oy, (MA) ≡ (NB), arătaţi că : a). (MO) ≡ (NO); b). demonstraţi că bisectoarea ∢(xOy) este bisectoare şi pentru ∢MON.

Bisectoarea şi mediatoarea

*

1). Să se arate că un punct oarecare C de pe mediatoarea unui segment [AB] este egal depărtat de capetele segmentului.

**

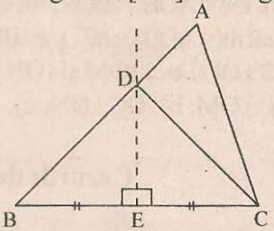


Fig. 50

2). În $\triangle ABC$ din figura 50, [AB] = 8 cm, AC = 6 cm şi DE mediatoarea laturii BC, E ∈ (BC), D ∈ (AB). Arătaţi că : a). $\triangle DEB \equiv \triangle DEC$; b). [DB] ≡ [DC]; c). perimetrul $\triangle ADC$.

3). Demonstraţi că orice punct de pe bisectoarea unui unghi este egal depărtat de laturile unghiului.

4). Fie $\triangle ADB$ şi $\triangle ACB$ dreptunghice în D şi respectiv în C, astfel încât ∢DAB ≡ ∢CBA (D şi C de aceeaşi parte a lui AB). Arătaţi că : a). $\triangle DAB \equiv \triangle CBA$; b). $\triangle DAO \equiv \triangle CBO$, BD ∩ CA = {O}; c). O aparţine mediatoarei segmentului (AB) şi segmentului (CD).

5). În $\triangle ABC$ isoscel (AB) ≡ (AC), fie O intersecţia dreptelor BM şi CN, unde M este mijlocul lui (AC), N este mijlocul lui (AB). Arătaţi că AO este mediatoarea segmentului BC.

6). În capetele segmentului AB se ridică perpendicularele AC⊥AB şi BD⊥AB, (AC) ≡ (BD), de aceeaşi parte a lui AB. Fie CB ∩ AD = {O}. Să se arate că O aparţine mediatoarei lui (AB).

7). Fie $\triangle ABC$ şi B ∈ (AE), C ∈ (AF). Dacă bisectoarele ∢EBC şi ∢FCB se intersectează în O, Arătaţi că AO este bisectoarea lui ∢BAC.

8). Pe laturile unui unghi cu vârful în O se aleg punctele A şi B ai (AO) ≡ (BO), A≠ B. Dacă mediatoarele segmentelor (AO) şi (BO) se intersecteaza în M, să se arate că OM este bisectoarea ∢O.

9). Să se construiască cercul înscris în triunghi :

a). $\triangle ABC$, când se cunosc : AB = 5 cm; AC = 8 cm; ∢A = 60^0

b). $\triangle ABC$, când se cunosc : AB = 6 cm; ∢B = 120^0 ; ∢A = 20^0

c). $\triangle ABC$, când se cunosc : (AB) ≡ (AC); ∢A = 80^0; AB = 5 cm

d). $\triangle ABC$, când se cunosc : AB = AC = BC = 6 cm

e). $\triangle ABC$, când se cunosc : AB = 8 cm; AC = 6 cm; ∢A = 90^0

f). $\triangle ABC$, când se cunosc : AB = 6 cm; ∢C = 90^0 ; ∢B = 60^0.

10). Să se construiască cercul circumscris triunghiului :

a). $\triangle ABC$, când se cunosc : AB = 4 cm; AC = 5 cm; ∢A = 150^0

b). $\triangle ABC$, când se cunosc : AB = 6 cm; ∢A = 40^0 ; ∢B = 70^0

c). $\triangle ABC$, când se cunosc : (AB) ≡ (AC); ∢A = 100^0; AB = 4 cm

d). $\triangle ABC$, când se cunosc : AB = AC = BC = 5 cm

e). $\triangle ABC$, când se cunosc : ∢A = 90^0; AC = 5 cm; ∢C = 45^0

f). $\triangle ABC$, când se cunosc : AC = 6 cm; ∢B = 90^0 ; ∢C = 30^0.

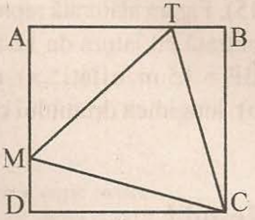
11). Să se arate că bisectoarea unghiului din vârful unui triunghi isoscel este mediatoarea bazei.

12). În $\triangle ABC$ se duc SC şi SB bisectoarele ∢C şi ∢B, apoi SM⊥AB, SN⊥AC, M ∈ (AB), N ∈ (AC). Să se demonstreze că SM ≡ SN.

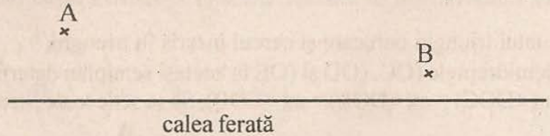
13). În $\triangle ABC$ se duc TM şi TN mediatoarele laturilor (AB) şi (AC), M ∈ (AB), N ∈ (AC). Demonstraţi că $\triangle TBC$ este triunghi isoscel.

14). În $\triangle ABC$ în care ∢B ≡ ∢C se duce AD⊥BC, D ∈ (BC). Demonstraţi că AD este bisectoarea unghiului ∢BAC şi mediatoarea laturii (BC).

15). Figura alăturată reprezintă un parc cu aleile MT, TC, MC. Unde trebuie amplasat un felinar care să lumineze la fel de bine toate cele trei alei ? (adică să se afle la egală distanţă de cele trei alei).



16). În figura de mai jos sunt reprezentate două localităţi A şi B şi calea ferată. Unde trebuie să fie amplasată gara pe calea ferată, astfel încât să fie la distanţe egale de cele două localităţi ?



Înălţimea unui triunghi. Aria triunghiului

PROBLEME

*

1). În triunghiul ∆ABC isoscel [AB] ≡ [AC] se duce înălţimea AD şi se prelungeşte cu [AD] ≡ [DE]. Să se arate că ∆ADC ≡ ∆EDC.

2). Să se afle aria unui triunghi cu o înălţime de 4 cm şi latura corespunzătoare acestei înălţimi de 16 cm.

3). Să se afle lungimea înălţimii unui triunghi corespunzătoare unei laturi de 5 cm dacă aria este de 20 cm^2.

4). Un triunghi dreptunghic are catetele de lungimi 3 cm şi 4 cm. Să se afle aria triunghiului.

**

5). Într-un ∆ABC se ştie AD⊥BC, D ∈ BC. Să se afle aria triunghiului în urmatoarele două cazuri :
a). BD = 4 cm, BD şi BC sunt proporţionale cu 1 şi 3, AD = 8 cm.
b). AD este egală cu 25% din BC, BD şi DC sunt direct proporţionale cu 2 şi 3 şi diferenţa lor este 4.

6). Să se afle o catetă a unui triunghi dreptunghic cu aria de 60 cm^2 şi lungimea celeilalte catete de 6 cm.

7). În ∆ABC se cunosc AB = 5 cm, AC = 6 cm, BB'⊥AC, B' ∈ AC, CC'⊥AB, C' ∈ AB, BB' = 10 cm. Să se afle CC'.

8). În ∆ABC cu m(∢C) = 90^0 se cunosc CA = 20 cm, CB = 15 cm, AB = 25 cm. Să se afle înălţimea CC', unde C' ∈ (AB).

9). Fie ∆ABC cu AB = 8 cm şi înălţimea CD = 6 cm, D ∈ (AB) şi ∆MNP cu MN = 12 cm şi înălţimea PR = 4 cm, R ∈ (MN). Sunt cele două triunghiuri echivalente ? (Justificaţi).

10). Fie triunghiul ∆ABC, cu laturile AB = 12 cm, AC = 16 cm şi BC = 24 cm. Dacă AD = 2 cm, AD⊥BC, calculaţi BE, BE⊥AC şi CF, CF⊥AB.

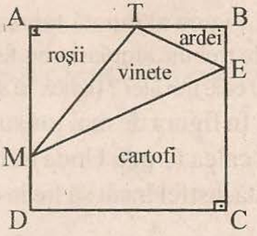
11). Fie ∆ABC cu m(∢A) = 20^0, m(∢B) = 70^0, AC = 8 cm şi BC = 3 cm. Aflaţi aria triunghiului.

12). În ∆ABC isoscel, (AB ≡ AC), se construiesc înălţimile BD⊥AC, D ∈ (AC) şi CE⊥AB, E ∈ (AB). Să se demonstreze că ∆BOC este isoscel unde {O} = BD ∩ CE.

13). Fie ∆ABC cu AB = 4 cm, BC = 6 cm şi BO înălţimea lui, O ∈ (AC). Se prelungeşte BO cu [OD] ≡ [OB]. Să se afle perimetrul patrulaterului ABCD.

14). Fie A, B, C coliniare, B ∈ (AC), AB = 6 cm, BC = 4 cm, DB⊥AC, D ∉ AC, DB = 6 cm şi E ∈ (DB), EB = 4 cm. Arătaţi că : a). unghiurile ∢A şi ∢C sunt complementare; b). AE⊥DC; c). CE⊥DA.

15). Figura alăturată reprezintă o grădină de legume de formă pătrată cu latura de 12 m. Dacă EC = 9 m, TD = 6 m şi BE = 15 m, aflaţi : a). aria cultivată cu fiecare legumă; b). lungimea drumului cel mai scurt de la T la BE.

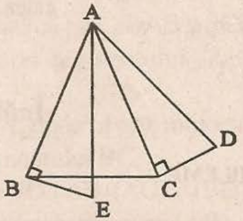


Testul 1

⑤2p 1). Să se deseneze bisectoarele unui triunghi oarecare şi cercul înscris în triunghi.

⑤2p 2). Fie unghiul AOB alungit şi semidreptele (OC, (OD şi (OE în acelaşi semiplan determinat de dreapta AB, astfel încât m(∢AOC) = m(∢DOC) = m(∢DOE) = m(∢EOB). Să se scrie toate perechile de semidrepte perpendiculare.

⑦2p 3). Fie △ABC isoscel din figură ([AB] ≡ [AC]), CD⊥AC, EB⊥AB şi [BE] ≡ [CD]. Să se demonstreze că △AED este isoscel.



4). Fie dreptele concurente AB şi CD, AB ∩ CD = {O} şi (OE⊥AB iar (OF⊥CD. Dacă OD este bisectoarea ∢EOB :

⑨2p a). să se afle m(∢EOF), semidreptele (OE şi (OF fiind în semiplane diferite faţă de AB.

⑩1p b). dacă M ∈ (OB, arătaţi că distanţele de la punctul M la semidreptele (OF şi (OD sunt egale.

Testul 2

⑤2p 1). Să se deseneze mediatoarele unui triunghi oarecare şi cercul circumscris triunghiului.

2). Fie ∢MON alungit iar (OP şi (OQ semidrepte astfel încât m(∢PON) = $\frac{1}{2}$ m(∢MOQ).

Dacă OQ⊥OP, atunci :

⑤2p a). să se realizeze desenul;

⑦2p b). să se afle m(∢MOQ).

⑨2p 3). Fie dreptele AB şi CD concurente în punctul O, E un punct ce nu aparţine nici unei drepte. Distanţa de la E la AB este EO. Dacă m(∢BOD) = 25^0, să se afle m(∢COE).

⑩1p 4). Fie △ABC isoscel [AB] ≡ [AC], BE⊥AC, E ∈ (AC), CF⊥AB, F ∈ (AB).

a). Să se demonstreze că △AEB ≡ △AFC.

b). Să se arate că (AO este bisectoarea ∢BAC, {O} = BE ∩ FC.

Capitolul IX
PARALELISM
Drepte paralele

NOŢIUNI DE BAZĂ

- două drepte distincte a şi b, conţinute în acelaşi plan care nu au nici un punct comun se numesc drepte paralele.
- dacă două drepte formează cu o secantă o pereche de unghiuri alterne interne congruente atunci dreptele sunt paralele şi reciproc.
- notaţie : a || b.

PROBLEME

*****

1). În figura 51 se ştie că a || b. Aflaţi unghiurile.

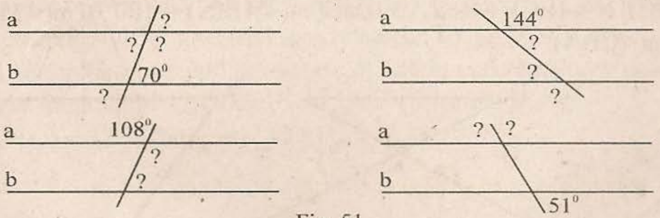


Fig. 51

******

2). În care din desenele conţinute în figura 52 dreptele a şi b sunt paralele ?

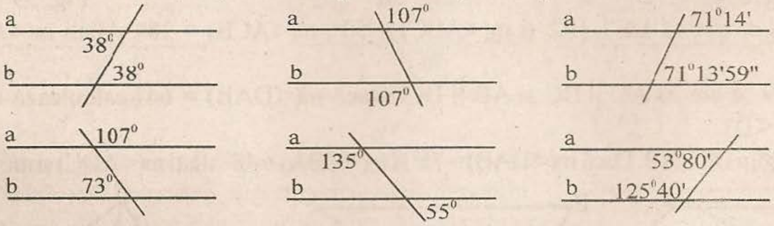


Fig. 52

3). În figura 53 se ştie că dreptele a şi b sunt paralele şi unghiul este de 5 ori mai mare decât ∢1. Să se afle celelalte unghiuri.

4). În figura 53 se ştie că dreptele a şi b sunt paralele şi unghiurile ∢5 şi ∢8 sunt direct proporţionale cu numerele 2 şi 3. Să se afle toate unghiurile care s-au format.

5). Să se afle unghiurile din figura 54 a). şi b).

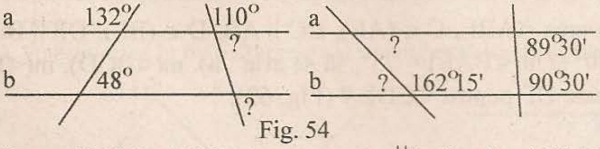


Fig. 54

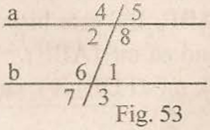


Fig. 53

6). În figura 55 (AD şi (BC bisectoare şi a || b. Dacă m(∢BAD) = 25°, să se afle m(∢EAB), m(∢ABC) şi m(∢ABF).

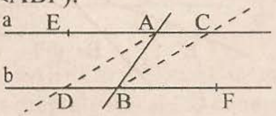


Fig. 55

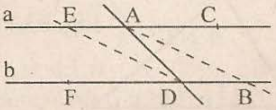
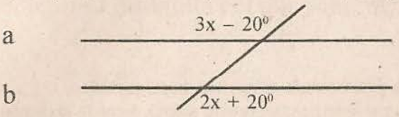
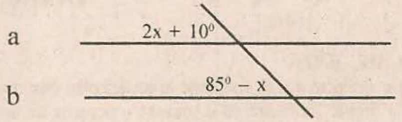


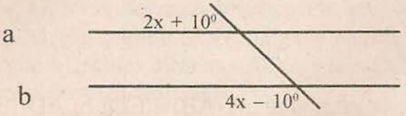
Fig. 56

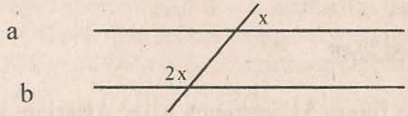
7). În figura 56 se ştie că m(∢CAB) = 38°, (AB şi (DE bisectoare şi m(∢ADF) = 76°. Cum sunt dreptele a şi b ?

8). Aflaţi x, dacă a || b, în fiecare din figurile următoare :









9). În fig.57 M ∈ (AC), N ∈ (BC), MN || AB. Dacă m(∢AMN) = 100° şi m(∢MNC) = 45° aflaţi m(∢CAB) şi m(∢CBA).

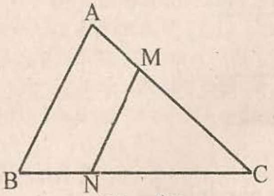


Fig. 57

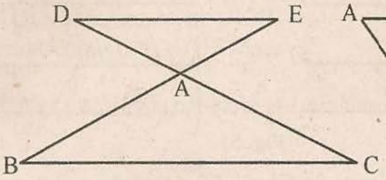


Fig. 58

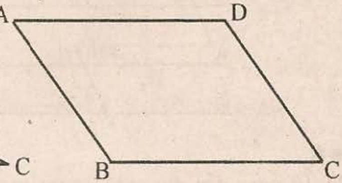


Fig. 59

10). În fig.58 se ştie că DE || BC, şi m(∢ABC) = 53°, m(∢ACB) = 28°. Aflaţi m(∢ADE) şi m(∢AED).

11). În fig.59 se şie că AD || BC şi AB || DC. Dacă m(∢DAB) = 64° calculează m(∢B), m(∢C) şi m(∢D).

12). În fig.60 ştim DC || AB. Dacă m(∢DAB) = 71° şi m(∢CBA) = 48° aflaţi m(∢ADC) şi m(∢BCD).

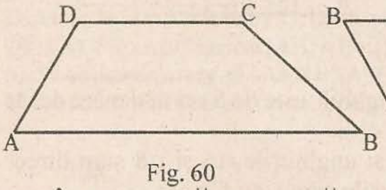


Fig. 60

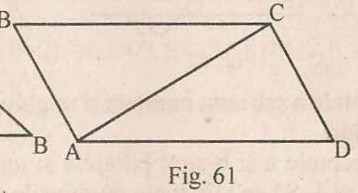


Fig. 61

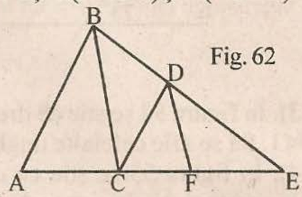


Fig. 62

13). În fig.61 AB || DC şi BC || AD. Ştiind că m(∢BAC) = 32° şi m(∢BCA) = 45°, să se afle m(∢DAC) şi m(∢DCA).

14). În ∆ABE, BC este bisectoarea ∢ABE, C ∈ (AE), DC || AB, D ∈ (BE), DF || BC, F ∈ (AE). Ştiind că m(∢ABE) = 80° şi m(∢BAE) = 75°, să se afle : a). m(∢BCD), m(∢DCF), m(∢CDF), m(∢FDE); b). ce este DF pentru ∢CDE ? (Fig. 62).

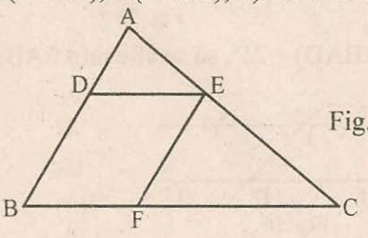


Fig. 63

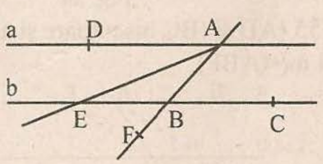


Fig. 64

15). Fie $\triangle ABC$ cu $m(\sphericalangle ABC) = 60^0$. Se construiesc $DE \parallel BC$, $D \in (AB)$, $E \in (AC)$, $EF \parallel AB$, $F \in (BC)$. Să se afle unghiurile $\sphericalangle ADE$, $\sphericalangle BDE$, $\sphericalangle DEF$, $\sphericalangle EFB$, $\sphericalangle EFC$. (Fig. 63).

16). În figura 64 se ştie că $m(\sphericalangle CBF) = 159^0$, $m(\sphericalangle EAB) = 10^0 30'$ şi (AE bisectoare. Sunt dreptele a şi b paralele ?

17). Arătaţi că dreptele a şi b sunt paralele dacă ele formează cu o secantă o pereche de unghiuri alterne interne ale căror bisectoare sunt paralele.

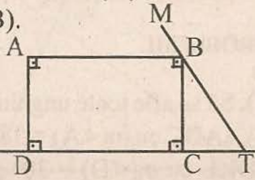
18). Prin vârfurile A şi C ale triunghiului $\triangle ABC$ se duc paralele $AD \parallel BC$ şi $DC \parallel AB$. Arătaţi că $\triangle ABC \equiv \triangle ADC$.

19). Prin vârful A al triunghiului $\triangle ABC$ se duce $AX \parallel BC$ şi fie K mijlocul lui AC şi $M \in (BC)$ oarecare. Dacă $MK \cap AX = \{D\}$, arătaţi că $\triangle ADK \equiv \triangle CMK$.

20). Fie $AC \cap BD = \{O\}$, $(AO) \equiv (OC)$, $O \in (BD)$, $AB \parallel CD$. Demonstraţi că : a). $(AB) \equiv (CD)$; b). $AD \parallel BC$.

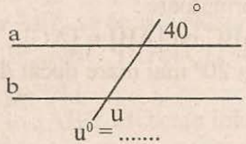
21). Prin capetele segmentului (AB) se duc $AD \parallel BC$, $(AD) \equiv (BC)$, $AB \cap CD = \{O\}$. Să se arate că : a). bisectoarele $\sphericalangle OBC$ şi $\sphericalangle OAD$ sunt paralele; b). $(AO) \equiv (OB)$.

22). Figura alăturată reprezintă schematic o casă în construcţie, de forma unui dreptunghi ABCD şi o scară MT sprijinită de zid. Dacă $m\sphericalangle(BTC) = 72^0$, aflaţi $m\sphericalangle(MBA)$ şi $m\sphericalangle(TBC)$.

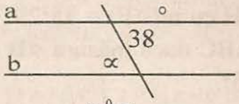


Testul 1

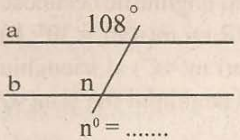
⑤4p 1). În figurile de mai jos se ştie că $a \parallel b$ şi c secantă. Completaţi :



$u^0 = ...$



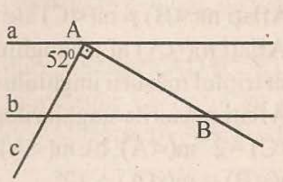
$\alpha^0 = ...$



$n^0 = ...$

⑦2p 2). Să se construiască $\triangle ABC$ cu $m(\sphericalangle A) = 90^0$, $m(\sphericalangle C) = 30^0$ şi AB = 4 cm şi cercul circumscris, respectiv cercul înscris în triunghi.

⑨2p 3). Să se afle măsurile unghiurilor triunghiului care se formează în figura alăturată, dacă $a \parallel b$ şi $c \perp AB$.



⑩1p 4). Fie două segmente $AB \parallel DC$ şi $(AB) \equiv (DC)$. Arătaţi că $(AD) \equiv (BC)$ şi $AD \parallel BC$.

Testul 2

⑤4p 1). Considerând dreptele paralele a şi b care sunt tăiate de o secantă c şi numerotând unghiurile care se formează cu cifre de la 1 la 8, scrieţi toate perechile de unghiuri alterne interne, alterne externe şi corespondente.

⑦2p 2). Stabiliţi dacă în fig.b dreptele a şi b sunt paralele. (Justificaţi răspunsul).

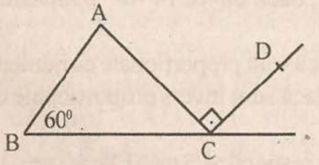


Fig. a

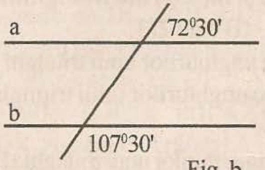


Fig. b

⑨2p 3). Dacă în fig. a $AB \parallel CD$ şi $CD \perp AC$ iar $m(\sphericalangle B) = 60^0$ atunci $m(\sphericalangle ACB) = ...$ şi $m(\sphericalangle BAC) = ...$

⑩1p 4). Fiind date dreptele AB şi CD concurente în punctul O şi ştiind că $[AO] \equiv [OB]$ şi $AD \parallel BC$, să se arate că $AC \parallel DB$.

Capitolul X

PROPRIETĂŢILE TRIUNGHIULUI

Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi

NOŢIUNI DE BAZĂ

- suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este egală cu 180^0
- într-un triunghi echilateral măsura unui unghi este 60^0
- într-un triunghi dreptunghic unghiurile ascuţite sunt complementare
- un triunghi isoscel în care măsura unuia dintre unghiuri este 60^0 este echilateral
- se numeşte unghi exterior al unui triunghi un unghi care este adiacent şi suplementar cu un unghi al triunghiului
- măsura unui unghi exterior al unui triunghi este egală cu suma măsurilor celor două unghiuri ale triunghiului neadiacente cu el
- bisectoarea unui unghi exterior al unui triunghi se numeşte bisectoare exterioară a triunghiului corespunzătoare unghiului respectiv
- bisectoarea exterioară şi interioară a aceluiaşi unghi sunt perpendiculare.

PROBLEME

*

1). Să se afle toate unghiurile triunghiului şi precizaţi felul triunghiului în fiecare caz în parte : a). $\triangle ABC$ cu $m(\sphericalangle A) = 38^0$ şi $m(\sphericalangle B) = 87^0$; b). $\triangle DEA$ cu $m(\sphericalangle D) = 35^0 43'$ şi $m(\sphericalangle E) = 100^0$; c). $\triangle DKL$ cu $m(\sphericalangle D) = 30^0$ şi $m(\sphericalangle K) = 30^0$; d). $\triangle MNP$ cu $m(\sphericalangle M) = 35^0 20'$ şi $m(\sphericalangle N) = 70^0 15'$ e). $\triangle RST$ cu $m(\sphericalangle R) = 45^0 12' 36''$ şi $m(\sphericalangle T) = 65^0 36' 45''$; f). $\triangle MKF$ cu $m(\sphericalangle M) = 66^0$ şi $\sphericalangle K \equiv \sphericalangle F$; g). $\triangle AOB$ cu $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle O \equiv \sphericalangle B$; h). $\triangle EFG$ cu $m(\sphericalangle E) = 27^0$ şi $m(\sphericalangle F) = 63^0$.

2). Aflaţi unghiurile necunoscute din triunghiurile dreptunghice următoare : a). $\triangle PQR$ cu $m(\sphericalangle P) = 30^0$; b). $\triangle FGH$ cu $m(\sphericalangle F) = 35^0 29'$; c.) $\triangle ABC$ cu $[AB] \equiv [AC]$.

3). Aflaţi $m(\sphericalangle C)$ al triunghiului $\triangle ABC$ dacă măsura $\sphericalangle B$ este cu 20^0 mai mare decât dublul măsurii unghiului $\sphericalangle A$ şi $m(\sphericalangle A) = 45^0$.

**

4). Aflaţi $m(\sphericalangle B)$ şi $m(\sphericalangle C)$ ale triunghiului $\triangle ABC$ care are $m(\sphericalangle A) = 84^0$ şi $m(\sphericalangle B) = 2 \cdot m(\sphericalangle C)$.

5). Aflaţi $m(\sphericalangle A)$ al triumghiului $\triangle ABC$ dacă măsura unghiului $\sphericalangle B$ este cu $15^0 30'$ mai mic decât triplul măsurii unghiului $\sphericalangle A$ şi $m(\sphericalangle C) = 35^0 30'$.

6). Aflaţi măsurile unghiurilor triunghiurilor $\triangle ABC$, în fiecare caz în parte : a). $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$ şi $m(\sphericalangle C) = 2 \cdot m(\sphericalangle A)$; b). $m(\sphericalangle A) = 2 \cdot m(\sphericalangle B)$ şi $m(\sphericalangle C) = 3 \cdot m(\sphericalangle B) + 12^0$; c). $m(\sphericalangle A) = 3 \cdot m(\sphericalangle C)$ şi $m(\sphericalangle B) = m(\sphericalangle A) + 12^0$.

7). Aflaţi măsurile unghiurilor triunghiurilor şi precizaţi ce fel de triunghiuri sunt : a). $\triangle AOP$ cu $[AO] \equiv [OP]$ şi $m(\sphericalangle O) = 60^0$; b). $\triangle MPR$ cu $[MP] \equiv [MR]$ şi $m(\sphericalangle R) = 59^0 60'$.

8). Aflaţi $m(\sphericalangle A)$ şi $m(\sphericalangle B)$ ale triunghiului $\triangle ABC$, dacă $m(\sphericalangle C) = 90^0$ şi $m(\sphericalangle A) = 2 \cdot m(\sphericalangle B)$.

9). Aflaţi $m(\sphericalangle B)$ şi $m(\sphericalangle C)$ ale triunghiului $\triangle ABC$, dacă $m(\sphericalangle A) = 120^0$ şi $m(\sphericalangle B) = 3 \cdot m(\sphericalangle C)$.

10). Aflaţi $m(\sphericalangle A)$ şi $m(\sphericalangle B)$ ale triunghiului $\triangle ABC$, dacă $m(\sphericalangle C) = 40^0$ şi raportul măsurilor unghiurilor $\sphericalangle A$ şi $\sphericalangle B$ este 2/3.

11). Aflaţi măsurile unghiurilor unui triunghi $\triangle ABC$ dacă sunt proporţionale cu numerele 5, 6, şi 7.

12). Aflaţi măsurile unghiurilor unui triunghi $\triangle EFG$ dacă sunt invers proporţionale cu numerele 0,25; 0,1(6); 0,125.

13). Aflaţi măsurile unghiurilor unui triunghi $\triangle FLM$ dacă se ştie că : $4/5\, m(\sphericalangle F) = 4/3\, m(\sphericalangle L) = m(\sphericalangle M)$.

14). Fie $\triangle ABC$ cu $m(\sphericalangle A) = 30^0$ şi $m(\sphericalangle B) = 68^0$. (CD este bisectoarea unghiului $\sphericalangle C$, $D \in (AB)$. Aflaţi $m(\sphericalangle C)$, $m(\sphericalangle ACD)$, $m(ADC)$, $m(\sphericalangle BDC)$.

15). În ∆ABC se ştie m(∢A) = 40^0 şi (BD este bisectoarea ∢B, D ∈ (AC), m(∢ABD) = 25^0. Aflaţi m(∢B), m(∢C), m(∢ADB).

16). În ∆ACD, (AB este bisectoarea unghiului ∢A, B ∈ (CD), m(∢BAC) = 20^0 şi m(∢D) = 50^0. Aflaţi m(∢A), m(∢C), m(∢ABC).

17). În ∆ABE, (AD este bisectoarea unghiului ∢A, D ∈ (BE), m(∢B) = 28^0 şi m(∢E) = 84^0. Aflaţi m(∢A), m(∢BAD), m(∢BDA).

18). În ∆ABC, AD este înălţime, D ∈ (BC), m(∢B) = 60^0 şi m(∢C) = 70^0. Aflaţi m(∢A), m(∢BAD), m(∢CAD), m(∢BDA).

19). În ∆ABC, BD este înălţime, D ∈ (AC), m(∢A) = 53^0 şi m(∢DBC) = 23^0. Aflaţi m(∢ABD), m(∢C), m(∢ADB).

20). Aflaţi x din figurile 55 şi 56 :

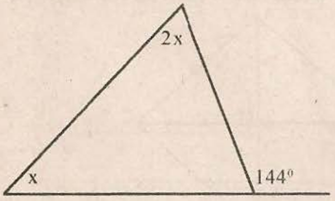


Fig.55

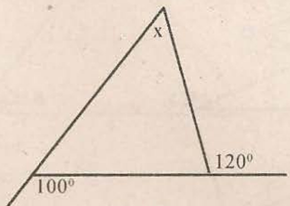


Fig.56

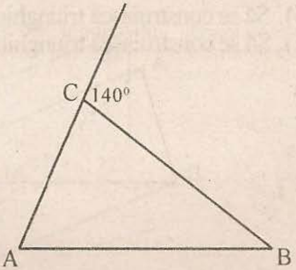


Fig. 57

21). În fig.57 seştie că m(∢A) : m(∢B) = 3 rest 20. Ştiind că măsura unghiului exterior din C are 140^0, să se afle măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

22). În ∆ABC, BD şi CD sunt bisectoarele ∢ABC şi ∢ACB. Dacă m(∢BDC) = 106^0, să se afle m(∢A).

23). În ∆ABC, BD este înălţime, D ∈ (AC), (AE este bisectoarea unghiului ∢A, E ∈ (BC), BD ∩ AE = {O}, m(∢C) = 63^0 şi m(∢BAE) = 15^0. Aflaţi m(∢AOB), m(∢AOD), m(∢BAC), m(∢CBD), m(∢AEB).

24). În ∆ABC dreptunghic cu m(∢A) = 90^0 şi m(∢B) = 28^0, se duce înălţimea AD şi DE || AC,

25). În ∆MNP se ştie că măsurile ∢N şi ∢P sunt invers proporţionale cu 1 şi 4 iar suma măsurilor lor este 100^0. Fie (MB şi (NA bisectoarele unghiurilor ∢M respectiv ∢N, B ∈ (NP), A ∈ (MB). Aflaţi măsurile unghiurilor triunghiului ∆NAB.

26). În triunghiul ∆ABC, m(∢A) = 65^0 şi m(∢C) = 70^0, se duce AD⊥BC, D ∈ (BC). Să se arate că AB este paralela cu bisectoarea ∢ADC.

27). În triunghiul ∆ABC obtuzunghic, m(∢B) = 20^0, AD⊥AB, D ∈ (BC). Dacă (DE este bisectoarea unghiului ∢CDA, E ∈ (AC) şi m(∢CAD) = 35^0. Arătaţi că DE⊥CA.

28). În ∆ABC, m(∢A) = 60^0 şi m(∢B) = 40^0, se consideră D ∈ (AB) astfel încât (∢ACD) = 30^0 şi E ∈ (BC) astfel încât m(∢BED) = 80^0. Să se arate că DC⊥AB şi DE || AC.

29). În ∆ABC m(∢A) = 100^0 şi m(∢C) = 20^0, (BE este bisectoarea unghiului ∢B, E ∈ (AC), se alege D ∈ (BC) astfel încât m(∢DEB) = 30^0. Să se arate că DE || AB.

30). Fie unghiul ∢XOY cu m(∢XOY) = 90^0, (OC ∈ int(∢XOY) astfel încât m(∢COY) = 60^0. Fie CB⊥OY, B ∈ (OY şi CA⊥OX, A ∈ (OX. Arătaţi că : a). ∆COB ≡ ∆OCA; b). CB || AO;c). CA || OB.

Mediana unui triunghi. Simetria față de o dreaptă

PROBLEME

**

1). În triunghiul ΔMKL isoscel, MK ≡ ML, MD mediana, D ∈ (KL). Dacă perimetrul este de 64 cm și DK = 10 cm, să se afle laturile triunghiului.
2). În triunghiul ΔDEF isoscel, DA și EB sunt mediane. A ∈ (EF) și B ∈ (DF). Să se afle perimetrul triunghiului dacă AE = 5 cm și BD = 6 cm.
3). În triunghiul ΔABC echilateral, AM este mediana M ∈ (BC) și MB = 8 cm. Să se afle perimetrul triunghiului.
4). Să se construiască triunghiul ΔABC știind că AB = 6 cm, BC = 8 cm și AM = 5 cm unde AM este mediana, M ∈ BC.
5). Să se construiască triunghiul ΔSTU cu SP mediana dacă SP = 5 cm, TP = 7 cm și m(∢SPT) = 60°.
6). Să se construiască triunghiul ΔDEF cu DB mediana dacă DE = 6 cm, EB = 4 cm iar m(∢E) = 70°.

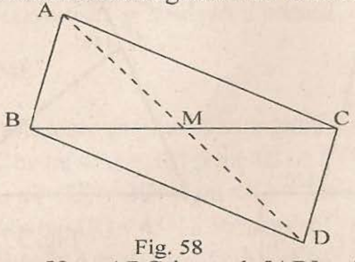


Fig. 58

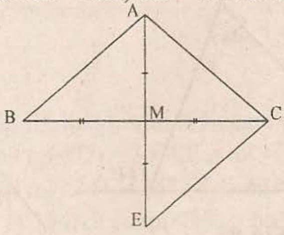


Fig. 59

7). În figura 59 : ΔABC isoscel, [AB] ≡ [AC], se duce mediana AM și se prelungește cu [AM] ≡ [ME]. Să se arate că : a). ΔABM ≡ ΔECM; b). ΔACE isoscel.
8). În ΔABC se duce mediana și se prelungește cu [MD] ≡ [AM]. Arătați că : a). AB || DC; b). BD || AC.
9). În ΔABC se duce mediana BM, M ∈ (AC). Prelungirea medianei intersectează paralela prin A la BC în punctul D. Să se arate că : a). ΔAMD ≡ ΔCMB; b). ΔMDC ≡ ΔMBA; c). DC || AB.
10). Fie ΔABC isoscel, [AB] ≡ [AC] și D simetricul lui A față de BC. Arătați că DB || AC și DC || AB.
11). În ΔABC m(∢B) = 40° și m(∢C) = 80°, se duce (AE bisectoarea unghiului ∢A, E ∈ (BC). Dacă D este simetricul lui E față de AC, aflați măsurile unghiurilor triunghiului ΔAED.
12). Fie ∢XOY și A ∈ (OX și B ∈ (OY astfel încât [AO] ≡ [BO]. Să se arate că punctele A și B sunt simetrice fata de bisectoarea unghiului.
13). În ΔABC din figura 58 se duce mediana AM și se prelungește cu [AM] ≡ [MD]. Arătați că : a). ΔAMC ≡ ΔDMB; b). ΔAMB ≡ ΔDMC; c). [AC] ≡ [BD]; d). [DC] ≡ [AB]; e). ΔABC ≡ ΔDCB.

Triunghiul isoscel

NOȚIUNI DE BAZĂ

-se numește triunghi isoscel triunghiul care are două laturi congruente.
- proprietățile triunghiului isoscel :
a). dacă un triunghi este isoscel , atunci unghiurile opuse laturilor congruente, sunt congruente și reciproc.
b). în orice triunghi isoscel, bisectoarea unghiului din vârf, mediana corespunzătoare bazei, înălțimea corespunzătoare bazei și mediatoarea bazei coincid.

PROBLEME

*

1). Triunghiul ΔABC are AB = 5 cm, BC = 7 cm și perimetrul 19 cm. Aflați lungimea laturii AC și stabiliți ce fel de triunghi este. Care este perechea de unghiuri congruente ?
2). Triunghiul ΔABC are AB = 5,5 cm, BC = 4 cm și perimetrul de 15 cm. Verificați dacă ΔABC are două unghiuri congruente. Care sunt acestea ?

**

3). Calculaţi perimetrul ▵ABC, în fiecare caz din figura 60.

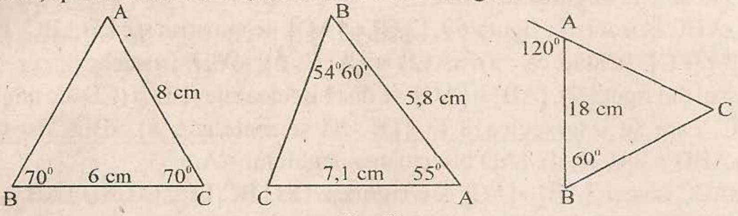


Fig. 60

4). Pe desenele din fig. 61, stabiliţi care triunghiuri sunt isoscele şi care laturi sunt congruente :

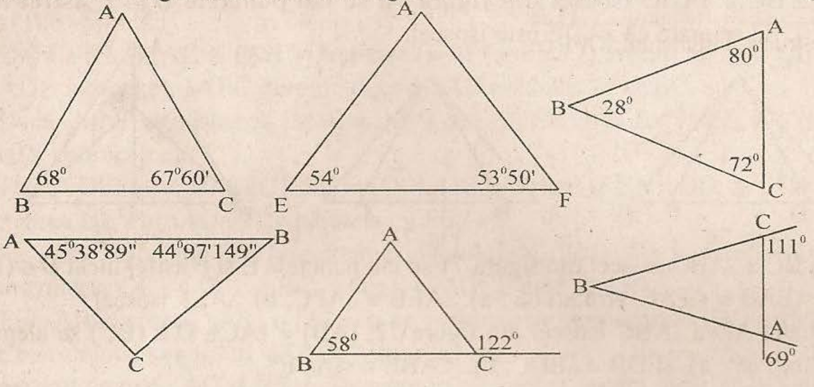


Fig. 61

5). Aflaţi m(∢B) în ▵ABC din figura 62 şi respectiv din figura 63. a). $P_{\Delta ABC}$ = 22cm, AC = 7 cm, BC = 8 cm; b). $P_{\Delta ABC}$ = 32 cm, AB = 14 cm, BC = 9 cm.

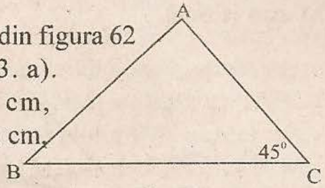


Fig. 62

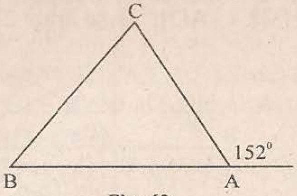


Fig. 63

6). Ştiind că triunghiul ▵ABC este isoscel, [AB] ≡ [AC], să se afle din figurile 65, 66 şi respectiv 67 : a). CD = ?; m(∢BDA) = ?; b). m(∢BAD) = ?; m(∢BDA) = ?; c). BD = ?; m(∢BAD) = ?; AC = ?; $P_{\Delta ABC}$ = ?

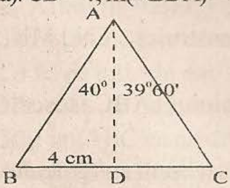


Fig. 65

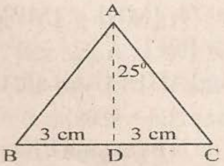


Fig. 66

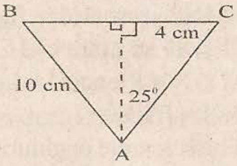


Fig. 67

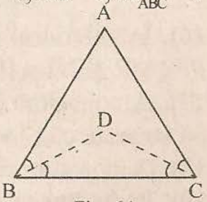


Fig. 64

7). În exteriorul triunghiului isoscel ▵ABC din figura 68, [AB] ≡ [AC] se aleg punctele E şi F astfel încât [EB] ≡ [CF] şi ∢EBC ≡ ∢FCB. Arătaţi că : a). ▵ABE ≡ ▵ACF; b). natura ▵AEF?

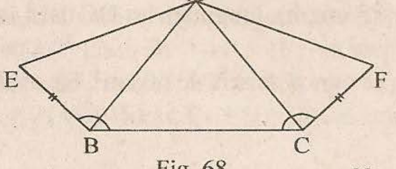


Fig. 68

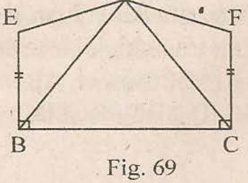


Fig. 69

8). În ∆ABC isoscel, (AB) ≡ (AC), se duce bisectoarea BE a ∢ABC, E ∈ (AC). Dacă m(∢AEB) = 75^0, să se afle unghiurile ∆ABC.

9). În exteriorul ∆ABC isoscel din figura 69, [AB] ≡ [AC], se construiesc EB⊥BC, FC⊥CB astfel încât [EB] ≡ [FC]. Arătaţi că : a). ∆AEB ≡ ∆AFC; b). ∆AEF isoscel.

10). În ∆ABC isoscel din figura 64, [AB] ≡ [AC], se duc bisectoarele (BD şi (CD ale unghiurilor ∢B respectiv ∢C, care se intersectează în {D}. Să se arate că : a). ∆BDC isoscel; b). [BD]≡[DC]; c). ∆ABD ≡ ∆ACD; d). (AD bisectoarea unghiului ∢A.

11). În exteriorul ∆ABC isoscel, [AB] ≡ [AC], se construiesc DB⊥BC, EC⊥BC, AD⊥AB, AE⊥AC. Arătaţi că : a). ∆ABD ≡ ∆ACE; b). [DB] ≡ [CE[; c). ∆ADE isoscel.

12). Pe baza BC a ∆ABC isoscel din figura 70 se iau punctele D şi E astfel încât [BD] ≡ [CE]. Să se arate că ∆ADE este isoscel.

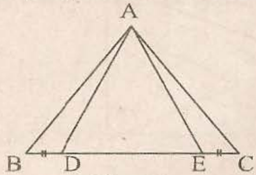


Fig. 70

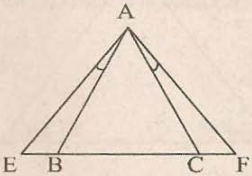


Fig. 71

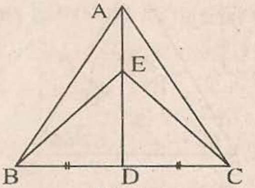


Fig. 72

13). Pe baza BC a ∆ABC isoscel din figura 71 se iau punctele E şi F astfel încât B ∈ (EC), C ∈ (BF) şi ∢EAB ≡ ∢FAC. Arătaţi că : a). ∆AEB ≡ ∆AFC; b). ∆AEF isoscel.

14). Pe mediana AD a ∆ABC isoscel din figura 72, [AB] ≡ [AC], D ∈ (BC) se alege un punct E. Arătaţi că : a). ∆EDB ≡ ∆EDC; b). ∢ABE ≡ ∢ACE.

15). În ∆ABC din figura 73 se duce înălţimea AD, D∈ (BC) care se prelungeşte cu segmentul [DM] ≡ [AD]. Să se arate că ∆ACM este isoscel.

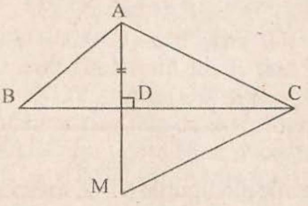


Fig. 73

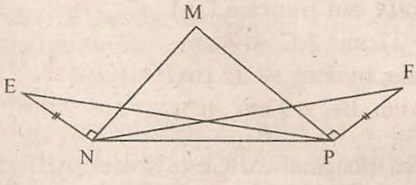


Fig. 74

16). În exteriorul ∆MNP isoscel din figura 74, [MN] ≡ [MP], se construiesc EN⊥MN, PF⊥MP, [EN] ≡ [PF]. Să se arate că [EP] ≡ [NF].

17). Se consideră M şi N mijloacele laturilor [AB] ≡ [AC] ale triunghiului ∆ABC isoscel. Să se arate că : [MC] ≡ [NB].

18). Demonstraţi că bisectoarele unghiurilor de la baza unui triunghi isoscel sunt congruente.

19). Pe înălţimea AE a ∆ABC isoscel, [AB] ≡ [AC], E ∈ (BC), se consideră un punct M. Arătaţi că : a). ∢ABM ≡ ∢ACM; b). ∢MBC ≡ ∢MCB.

20). În ∆ABC isoscel, AB ≡ AC, AD⊥BC este înălţime, D ∈ BC. Să se afle : a). aria triunghiului dacă se ştiu BD = 2 cm şi AD = 5 cm; b). lungimea lui DC dacă înălţimea AD este de 6 cm şi aria triunghiului este de 48 cm^2.

21). În triunghiul ∆ABC isoscel, AB ≡ AC, se cunoaşte aria de 60 cm^2. Să se afle lungimea înălţimii AD⊥BC, D ∈ BC, dacă DC = 3 cm.

22). Dacă a || b şi (BF bisectoare, să se arate că ∆AFB isoscel (vezi figura 75).
23). În figura 76 : a || b şi (AD şi (BC bisectoare. Să se arate că AD⊥BC şi [BD] ≡ [DC].

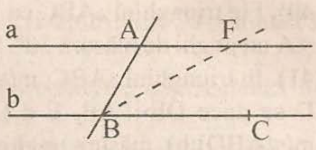


Fig. 75

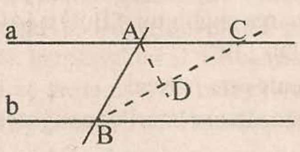


Fig. 76

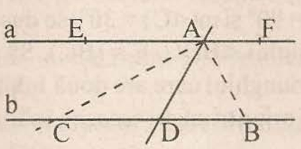


Fig. 77

24). Dacă a || b şi (AC şi (AB bisectoare (vezi figura 77),arătaţi că : a). ∆ADC isoscel; b). ∆ADB isoscel;c). ∆ABC dreptunghic; d). AD mediana în ∆ABC.
25). Dacă ∆MNP este isoscel, [MN] ≡ [MP], şi EF || NP unde E ∈ (MN), F ∈ (MP), arătaţi că ∆MEF este isoscel.
26). Dacă ∆DEF este isoscel, [DE] ≡ [DF], DC înălţime şi EA || DC, A ∈ DF. Arătaţi că bisectoarea DB din ∆ADE este paralela cu FE.
27). Fie ∆GBC oarecare, (CD bisectoarea unghiului ∢C, D ∈ (GB). În exteriorul triunghiului se construieşte GE || CD, E ∈ BC. Arătaţi că ∆GCE este isoscel.
28). Fie ∆ABC isoscel, [AB] ≡ [AC], şi se construieşte semidreapta (BO astfel încât (BC să fie bisectoarea unghiului ∢ABO. Arătaţi că AC || BO.
29). Se dau dreptele AD şi BE concurente în punctul C astfel încât ∆ABC şi ∆CDE sunt isoscele [AB] ≡ [AC], [DC] ≡ [DE]. Dacă AM şi DN sunt înălţimi M ∈ (BC) şi N ∈ (CE) Arătaţi că : a). MN reprezintă 50% din BE; b). dacă m(∢BAC) = 40^0, să se afle m(∢NDE).
30). Să se afle unghiurile triunghiurilor isoscele următoare : a). ∆CDE cu m(∢D) = 78^0 şi [CD] ≡ DE]; b). ∆MNP cu m(C) = $50^0 31'$ şi [NM] ≡ [MP]; c). ∆ABC cu m(∢C) = $50^0 30'$ şi [AB] ≡ [AC].
31). Aflaţi unghiul ∢B în triunghiul ∆BDE isoscel care are m(∢D) = 48^0.
32). În ∆ABC isoscel, [AB] ≡ [AC], se duce MN || AB, M ∈ (BC) şi N ∈ (AC). Dacă (∢A) = 70^0, să se afle măsurile unghiurilor triunghiului ∆MNC.
33). În ∆ABC isoscel cu [AB] ≡ [AC], bisectoarele unghiurilor ∢B şi ∢C se intersectează în E. Aflaţi m(∢BEC) în fiecare caz : a). m(∢A) = 34^0; b). m(∢C) = 50^0.
34). În ∆ABC isoscel cu [AB] ≡ [AC], m(∢A) = 36^0, (BE este bisectoarea unghiului ∢B, E ∈ (AC). Ce fel de triunghi este ∆BEC ? Dar ∆BEA ? Dacă FA⊥AB, F ∈ BE, ce fel de triunghi este ∆AEF ?
35). OA şi OB sunt raze într-un cerc. Dacă m(∢AOB) = 80^0, să se afle m(∢OAB).
36). În ∆ABC cu m(∢A) = 90^0 şi m(∢B) = 60^0 se consideră D ∈ (BC) astfel încât [AB] ≡ [AD]. Aflaţi măsurile unghiurilor ∆ABD şi ∆ADC.
37). În ∆ABC isoscel [AB] ≡ [AC], m(∢A) = 20^0, MN || AC, M ∈ (AB), N ∈ (BC). NP bisectoare a unghiului ∢MNB, P ∈ (AB), intersectează prelungirea lui AC în O. Aflaţi măsurile unghiurilor triunghiului ∆NCO.
38).În triunghiul ∆ABC isoscel [AB] ≡ [AC], m(∢A) = 20^0, prin mijlocul D al laturii BC se duce perpendiculara DP pe AC, P ∈ (AC).Dacă DP ∩ AB = {E}, să se afle măsurile unghiurilor triunghiului ∆BED.
39). În triunghiul ∆ABC isoscel [AB] ≡ [AC], m(∢A) = 40^0, BD⊥AC cu D ∈ (AC) şi (CE bisectoarea unghiului ∢C, E ∈ (AB). Dacă CE ∩ BD = {F}, să se afle măsurile unghiurilor triunghiului ∆BFC.

40). Fie triunghiul $\triangle ABC$ cu $[AB] \equiv [AC]$. Mediatoarea laturii AB formează cu bisectoarea $\sphericalangle A$ un unghi de măsură 50^0. Să se afle măsurile unghiurilor triunghiului $\triangle ABC$.

41). În triunghiul $\triangle ABC$, $m(\sphericalangle C) = 30^0$, (AD este bisectoarea unghiului $\sphericalangle A$, $D \in (BC)$. Prin D se duce $DE \parallel AB$, $E \in (AC)$. Ştiind că $m(\sphericalangle DAE) = 40^0$ să se afle : a). $m(\sphericalangle DEC)$; $m(\sphericalangle ABD)$;b). măsura unghiului format de înălţimea AF, $F \in (BC)$ cu dreapta DE.

42). În $\triangle ABC$ $m(\sphericalangle A) = 90^0$ şi $m(\sphericalangle C) = 30^0$, se duc (BD bisectoarea unghiului $\sphericalangle B$, $D \in (AC)$, (DE bisectoarea unghiului $\sphericalangle BDC$, $E \in (BC)$. Să se arate că $DE \perp BC$.

43). Demonstraţi că triunghiul care are două înălţimi congruente este isoscel.

44). Demonstraţi că în orice triunghi isoscel, înălţimile corespunzătoare laturilor congruente sunt congruente.

Triunghiul echilateral

NOŢIUNI DE BAZĂ

- se numeşte triunghi echilateral triunghiul care are toate laturile congruente.
- proprietăţile triunghiului echilateral : a). unghiurile unui triunghi echilateral sunt congruente.
  b). triunghiul cu toate unghiurile congruente este echilateral
  c). în orice triunghi echilateral bisectoarele unghiurilor coincid cu medianele, mediatoarele şi înălţimile triunghiului.

PROBLEME

*

1). În $\triangle MBC$ echilateral, MD bisectoare, $D \in (BC)$ şi $DC = 4$ cm. Aflaţi perimetrul $\triangle MBC$.

2). În $\triangle MBC$ echilateral, MD înălţime, $D \in (BC)$ astfel încât $DC = 5{,}5$ cm. Aflaţi perimetrul $\triangle MBC$.

3). Pe un cerc se consideră punctele B şi C astfel încât BC este congruent cu raza cercului. Ce fel de triunghi este $\triangle OBC$?

**

4). În $\triangle DEF$ echilateral având perimetrul de 18 cm, se consideră $M \in (DE)$ astfel încât $ME = 3$ cm. Să se arate că : $FM \perp DE$ şi $\sphericalangle DFM \equiv \sphericalangle EFM$.

5). În exteriorul triunghiului $\triangle ABC$ isoscel, $[AB] \equiv [AC]$, se construiesc triunghiurile echilaterale $\triangle ADC$ şi $\triangle ABE$. Demonstraţi că : a). $\triangle AEC \equiv \triangle ADB$; b). $\triangle BEC \equiv \triangle CDB$.

6). În figura 70 triunghiul $\triangle ABC$ este echilateral şi $\triangle ADC \equiv \triangle CFB \equiv \triangle BEA$ sunt isoscele. Arătaţi că $\triangle EFD$ este echilateral.

7). În figura 71 triunghiul $\triangle ABC$ este echilateral şi $AA' \perp AB$, $BB' \perp BC$ şi $CC' \perp AC$. Ştiind că $AA' \equiv BB' \equiv CC'$, să se arate că $\triangle A'B'C'$ este echilateral.

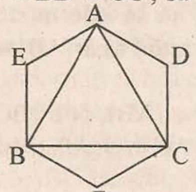


Fig. 70

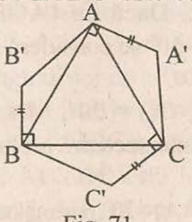


Fig. 71

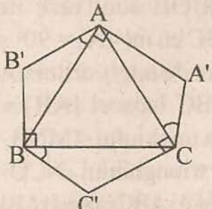


Fig.72

8). În figura 72 triunghiul $\triangle ABC$ este echilateral şi $AA' \perp AB$, $BB' \perp BC$ şi $CC' \perp AC$. Ştiind că $\sphericalangle ACA' \equiv \sphericalangle CBC' \equiv \sphericalangle B'AB$, să se arate că $\triangle A'B'C'$ este echilateral.

9). Fie triunghiul ∆BCD echilateral cu (BM bisectoare şi P mijlocul laturii BD. Să se arate că triunghiul ∆MPD este echilateral.
10). Fie triunghiul ∆BCD echilateral şi DM, BN, CP bisectoare care se intersectează în punctul O. Să se arate că OM ≡ ON ≡ OP.
11). Fie triunghiul ∆ABC echilateral şi AM, BN, CP mediane care se intersectează în punctul O. Arătaţi că triunghiul ∆MNP este echilateral.
12). În triunghiul ∆DEF echilateral, DM, EC sunt înălţimi care se intersectează în punctul O. Să se arate că (OF este bisectoarea ∢DFE.
13). Fie ∆ABC echilateral şi D simetricul lui A fata de BC şi (BM bisectoarea unghiului ∢B, M ∈ (AC). Arătaţi că : a). AC || BD; b). ∆BOD este dreptunghic, unde BM ∩ AD = {O}.
14). Fie ∆ABC echilateral se consideră (AD bisectoarea unghiului ∢A, D ∈ (BC). Din D se duce paralela la AB care intersectează AC în E. Să se demonstreze că E este mijlocul laturii AC.
15). În triunghiul ∆ABC echilateral, bisectoarele unghiurilor ∢A şi ∢B se intersectează în E şi DA⊥AB unde D ∈ BE. Ce fel de triunghi este ∆AED ?
16). În triunghiul ∆ABC, [AB] ≡ [AC], m(∢C) = 75°, se construieşte D simetricul lui B faţă de AC. Arătaţi că triunghiul ∆ABD este echilateral.
17). În ∆ABC m(∢A) = 90°, m(∢B) = 30°, D simetricul lui C fata de AB. Arătaţi că triunghiul ∆BCD este echilateral.
18). Fie unghiul ∢XOY cu m(∢XOY) = 60° şi A ∈ (OX, B simetricul lui A faţă de bisectoarea unghiului ∢XOY. Arătaţi că ∆AOB este echilateral.
19). Fie triunghiul ∆ABC isoscel, m(∢A) = m(∢B) = 30° şi D simetricul lui B fata de AC. Să se arate că ∆ABD este echilateral.
20). Fie punctul B aparţinând bisectoarei triunghiului XOY, E şi C simetricele lui B faţă de (OX şi (OY. Dacă m(∢XOY) = 30° ce fel de triunghi este ∆EOC ?
21). În ∆ABC, D este mijlocul lui BC şi E este simetricul lui D faţă de AC şi F simetricul lui C faţă de AB. Arătaţi că ∆AFB şi ∆ADE sunt echilaterale.
22). Fie ∆ABC echilateral cu AM mediana, M ∈ (BC), BP înălţimea, P ∈ (AC), AM ∩ BP = {O}. Arătaţi că ∆POC ≡ ∆MOC.
23). În triunghiul ∆ABC echilateral, (AP şi (BR sunt bisectoare P ∈ (BC) şi R ∈ (AC). Se construieşte perpendiculara în A pe AP care intersectează prelungirea lui BR în D. Arătaţi că D este simetricul lui B faţă de AC.
24). În triunghiul ∆ABC echilateral, BR şi CP sunt mediane, R ∈ (AC) şi P ∈ (AB). Se construiesc perpendiculara în B pe BR care intersectează PC în D şi perpendiculara în C pe PC care intersectează BR în E. Arătaţi că [BE] ≡ [DC] şi D, A, E puncte coliniare.
25). Se dă triunghiul ∆ABC echilateral. Să se afle măsura unghiurilor formate de bisectoarele a două unghiuri ale triunghiului.
26). Fie ∆ABC echilateral şi [AM] ≡ [AN], M ∈ (AB) şi N ∈ (AC). Arătaţi că MN || BC.

Proprietăţile triunghiului dreptunghic

NOŢIUNI DE BAZĂ
- se numeşte triunghi dreptunghic triunghiul care are un unghi drept
- într-un triunghi dreptunghic cateta care se opune unui unghi cu măsura 30° are lungimea egală cu jumatate din lungimea ipotenuzei
- în orice triunghi dreptunghic lungimea medianei corespunzătoare ipotenuzei este egală cu jumatate din lungimea ipotenuzei.

PROBLEME

******

1). Fie unghiul $\sphericalangle AOB$ cu măsura de 30^0 şi $C \in (OA$ astfel încât $OC = 6$ cm. Aflaţi CD, $D \in (OB$ astfel încât $CD \perp OB$.

2). Fie unghiul $\sphericalangle AOB$ a cărui măsură este de 120^0 şi $C \in (OA$ astfel încât $OC = 8$ cm. Aflaţi OD şi OE unde E şi $D \in OB$ astfel încât $CD \perp OA$ şi $CE \perp OB$.

3). Fie unghiul $\sphericalangle AOB$ a cărui măsura este de 60^0 şi (OE bisectoarea lui, astfel încât $OE = 4$ cm. Determinati distanţele de la E la laturile unghiului.

4). În exteriorul $\triangle ABC$ echilateral se consideră $D \in (BC$ astfel încât $[BC] \equiv [CD]$. Arătaţi că triunghiul $\triangle ABD$ este dreptunghic.

5). În triunghiul $\triangle ABC$ cu $m(\sphericalangle A) = 90^0$ şi $m(\sphericalangle B) = 60^0$, se duce $AD \perp BC$, $D \in (BC)$ şi $E \in (DC)$, simetricul lui B faţă de AD. Să se arate că $\triangle ABE$ echilateral, $\triangle AEC$ isoscel şi AE mediana în $\triangle ABC$.

6). Care este punctul de intersectie al mediatoarelor unui triunghi dreptunghic ?

7). În $\triangle ABC$ cu $m(\sphericalangle A) = 90^0$, $m(\sphericalangle B) = 60^0$ fie BE bisectoarea lui $\sphericalangle ABC$, $E \in (AC)$ şi $ED \perp BC$, $D \in (BC)$. a). să se arate că D este mijlocul lui (BC); b). dacă $AC = 9$ cm, aflaţi BE şi ED.

8). În $\triangle ABC$ cu $m(\sphericalangle B) = 90^0$ şi $m(\sphericalangle C) = 30^0$ se duce $BD \perp AC$, $D \in (AC)$. Dacă $AD = 4$ cm, aflaţi AC.

9). În $\triangle ABC$ se ştie că $m(\sphericalangle A) = 90^0$, $AB = 6$ cm şi $m(\sphericalangle C) = 30^0$. Dacă D este mijlocul lui (BC), aflaţi $P_{\triangle ABD}$.

10). În $\triangle ABC$ se ştie că $m(\sphericalangle B) = 90^0$, $AC = 12$ cm şi $AB = 5$ cm. Dacă D este mijlocul lui (AC), aflaţi $P_{\triangle ABD}$.

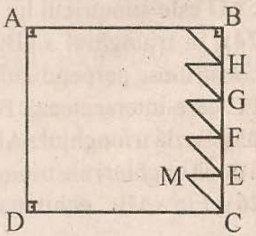
11). Fie $\triangle ABC$ în care se ştie că unghiul exterior din B este de 4 ori mai mare decât $\sphericalangle A$ şi unghiul exterior din C este de 3 ori mai mare decât $\sphericalangle A$. Arătaţi că $BC = AB/2$.

12). În $\triangle ABC$ ($[AB] \equiv [AC]$), $m(\sphericalangle A) = 120^0$ şi $AC = 6$ cm. Să se afle lungimea medianei corespunzătoare laturii BC.

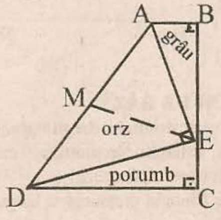
13). Fie $\triangle ABC$ cu $m(\sphericalangle A) = 90^0$. Dacă $m(\sphericalangle B)$ este de 4 ori mai mare decât $m(\sphericalangle C)$, să se afle măsurile unghiurilor formate de mediana AD cu ipotenuza BC, ($D \in (BC)$).

14). Fie $\triangle ABC$ oarecare. Dacă CC' şi BB' sunt înălţimile corespunzătoare laturilor AB respectiv AC, să se demonstreze că $\triangle MB'C'$ este isoscel, unde M este mijlocul laturii BC.

15). Fie $\triangle ABC$ oarecare şi $AD \perp BC$, $D \in (BC)$, M şi N mijloacele laturilor [AB] respectiv [AC]. Arătaţi că : a). $\triangle AMN \equiv \triangle DMN$;). $AD \perp MN$; c). $MN \parallel BC$.



16). Figura alăturată reprezintă un bloc cu parter, 4 etaje şi scara lui de incendiu, având dimensiunile $BC = 7{,}5$ m, $BH = HG = GF = FE = EC$. Scara MC face cu DC un unghi de 30^0. Aflaţi : a). lungimea scării MC; b). dacă treptele se pun la distanţa de 25 cm unele de altele, câte trepte sunt pe MC ? Câte trepte sunt de la sol la acoperiş ?



17). ABCD este un teren cu $m(\sphericalangle B) = m(\sphericalangle C) = 90^0 = m(\sphericalangle AED)$, $(EC) \equiv (AB)$, $m(\sphericalangle EDC) = 36^0$. a). cum sunt suprafeţele cultivate cu grâu şi porumb ? b). dacă ME este o potecă - drumul cel mai scurt de la E la AD, aflaţi poziţia lui M pe AD. c). aflaţi lungimea lui ME în funcţie de AD.

Relații între laturile și unghiurile unui triunghi oarecare

NOȚIUNI DE BAZĂ

- într-un triunghi unui unghi mai mare i se opune o latură mai mare și reciproc.
- dintre două oblice duse dintr-un punct pe aceeași dreaptă, cea „mai depărtată" de piciorul perpendicularei este „cea mai lungă".
- într-un triunghi lungimea oricărei laturi este mai mică decât suma lungimilor celorlalte două laturi și mai mare decât valoarea absolută a diferenței lor.

PROBLEME

*

1). Ordonați laturile crescător în triunghiurile următoare :

a). $\triangle ABC$ cu $m(\sphericalangle A) = 30^0$, $m(\sphericalangle B) = 80^0$

b). $\triangle ABC$ cu $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle B) = 15^0$

c). $\triangle ABC$ cu $m(\sphericalangle A) = 85^0$ și $m(\sphericalangle C) = 20^0$

d). $\triangle ABC$ cu $m(\sphericalangle B) = 70^0$ și $m(\sphericalangle C) = 40^0$

e). $\triangle ABC$ cu $(AB) = (AC)$ și $m(\sphericalangle B) = 60^0$

2). Ordonați unghiurile în următoarele triunghiuri :

a). $\triangle ABC$ cu $AB = 5$ cm, $BC = 8$ cm și $P_{\triangle ABC} = 20$ cm.

b). $\triangle ABC$ cu $AB = 8$ cm, $AC = 7$ cm și $P_{\triangle ABC} = 23$ cm.

c). $\triangle ABC$ isoscel cu $AB = 2$ cm și $AC = 5$ cm.

3). Care este cea mai mare latură într-un triunghi obtuzunghic ? Dar într-un triunghi dreptunghic ?

**

4). Să se precizeze care din următoarele numere pot fi laturile unui triunghi :

a). 3; 4 și 5 b). 3; 4 și 8 c). 7; 2 și 5 d). 8; 8 și 3

e). 9; 9 și 20 f). 14; 4 și 3 g). 14; 4 și 12 h). 14; 4 și 20

5). Să se ordoneze bisectoarea, mediana și înălțimea ce pornesc toate din vârful unghiului de 90^0 într-un triunghi dreptunghic.

Testul 1

⑤ 2p 1). Aflați $m(\sphericalangle C)$ în triunghiul ABC dacă $m(\sphericalangle A) = 90^0$ și $m(\sphericalangle B) = 37^0$.

2). În $\triangle ABC$ isoscel, $(AB) \equiv (AC)$ cu $m(\sphericalangle A) = 40^0$ se duce bisectoarea (BD a unghiului $\sphericalangle ABC$, $D \in (AC)$.

⑤1p a). Realizați desenul; ⑦1p b). Aflați $m(\sphericalangle BDC) =$ ....

⑦1p 3). Dacă $\triangle ABC$ isoscel, $(AB) \equiv (AC)$ se duce înălțimea AD, $D \in (BC)$, $DC = 2{,}5$ cm și $m(\sphericalangle B) = 40^0$, atunci $BC =$ .... și $m(\sphericalangle DAB) =$ ....

4). Fie $m(\sphericalangle XOY) = 45^0$ și $B \in (Ox$, $BA \perp (Oy$, $A \in (Oy$, $AC \perp (Ox$, $C \in (Ox$.

⑤1p a). Realizați desenul;

⑨2p b). Demonstrați că AC este mediatoarea lui (OB) și bisectoarea lui $\sphericalangle OAB$.

⑩1p 5). În $\triangle ABC$, AD este mediană. Unde trebuie ales punctul $E \in AD$ astfel încât $A_{\triangle AEC} = \frac{1}{4} A_{\triangle ABC}$?

Testul 2

⑤2p 1). Dacă AD este bisectoarea $\sphericalangle BAC$ al triunghiului echilateral ABC, $D \in (BC)$, atunci $m(\sphericalangle ADC) =$ ....

2).⑤1p a). Să se construiască un triunghi isoscel MNP știind că baza $MN = 10$ cm și înălțimea $PQ = 4$ cm, $Q \in (MN)$.

⑤1p b). Să se afle aria triunghiului MNP.

⑦ 2p 3). Să se afle $m(\sphericalangle AOB)$ în triunghiul ABC, dacă O este ortocentrul triunghiului.

⑨ 2p 4). Să se afle perimetrul $\triangle ABC$ echilateral, dacă D este piciorul înălțimii dusă din A, $D \in (BC)$ și $BD = 3x - 5$ iar $DC = x + 13$.

⑩ 1p 5). Fie ΔABC dreptunghic în B cu m(∢C) = 30°. Dacă distanța de la A la BC este 6 cm, să se afle AC și CD unde BD⊥AC, D∈(AC).

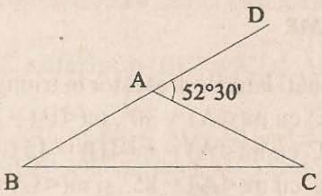
Testul 3

1).⑤2p a). Să se deseneze ΔABC știind că m(∢A) = 90°, AC = 5 cm și AB = 7 cm.

⑤2p b). Să se afle $A_{\Delta ABC}$

⑩ 1p 2). Dacă mediana [AO] a triunghiului ABC, dreptunghic în A, este congruentă cu cateta AB, să se afle m(∢AOC).

⑦ 2p 3). În figura alăturată, ΔABC isoscel de bază BC are m(∢CAD) = 52°30', ∢CAD fiind exterior triunghiului. Să se afle măsurile unghiurilor triunghiului ABC.



⑨1p 4). În ΔABC cu m(∢A) = 70°, m(∢C) = 50° se duce bisectoarea BD, D∈(AC) și DE||AB, E∈(BC). Să se afle m(∢BDE) și m(∢BED).

⑨1p 5). În ΔABC, m(∢B) = 90°, m(∢C) = 30°, se știe AC = 32 cm. Dacă E este mijlocul laturii AC, atunci perimetrul ΔABE este egal cu .... cm.

Probleme recapitulative

1). Aflați valoarea de adevăr a propozițiilor următoare dacă A, B, C, D coliniare în această ordine :
a). [BC] ⊂ AD b). [AD]∩[BD = [BD] c). C∈[AD]∩[BD d). [AB]∪[BC] = [AC]
e). B∈(AB)∪(BC) f). B∈[AC]∩[BC] g). C∈[AC]∩[BC] h). A∈[AC]∩[BC]

2). Fie A, B, C puncte coliniare în această ordine, M, N mijloacele segmentelor [AB] și [AC]. Aflați MN dacă BC = 8, AC = 14.

3). Arătați că dacă A, B, C coliniare, AB > BC, atunci M mijlocul lui [AC] aparține segmentului [AB].

4). Arătați că dacă A, B, C, D coliniare, astfel încât [AB] ≡ [CD], atunci mijlocul lui [AD] coincide cu mijlocul lui [BC].

5). Arătați că dacă A, B, C, D coliniare, AB = 6, BC = 8, CD = 2. Aflați MN dacă M și N sunt mijloacele segmentelor [AD], respectiv [BC].

6). Fie semidreptele (OA, (OB, (OC, (OD în același semiplan determinat de (OD, astfel încât ∢BOA ≡ ∢COD. Arătați că bisectoarea lui ∢AOD coincide cu bisectoarea lui ∢BOC.

7). Fie semidreptele (OA, (OB, (OC, (OD în același semiplan determinat de (OA, dacă ∢AOC ≡ ∢BOD atunci ∢AOB ≡ ∢COD.

8). Fie unghiurile adiacente două câte două, m(∢AOB) = 40°, m(∢BOC) = 50°, m(∢COD) = 40°. Arătați că bisectoarele unghiurilor ∢AOB și ∢COD sunt perpendiculare.

9). Fie ∢AOB si ∢BOC adiacente complementare, (OD semidreapta opusa lui (OB. Aflați măsura ∢AOB și ∢BOC dacă : a). m(∢AOD) = 130°; b). m(∢AOD) = 2 · m(∢AOB); c). m(∢AOD) este cu 20° mai mică decât m(∢DOC); d). m(∢AOD) = 4 · m(∢BOC).

10). Fie ∢AOB, ∢BOC adiacente suplementare, (OD bisectoarea lui ∢AOB, (OE opusă bisectoarei. Aflați măsurile lui ∢AOB si ∢BOC dacă : a). m(∢EOC) = 50°; b). m(∢EOC) este cu 10° mai mare decât m(∢BOC); c). m(∢AOE) este de trei ori mai mare decât m(∢EOC); d). ∢AOE ≡ ∢AOB; e). ∢AOE și ∢BOC suplementare; f). ∢BOC și ∢COE complementare.

11). Fie $\sphericalangle AOB$ şi $\sphericalangle AOC$ neadiacente suplementare, (OD semidreapta opusă lui (OB. Dacă $m(\sphericalangle AOD) = 108^0$, aflaţi $m(\sphericalangle DOC)$.

12). Fie (OD, (OC, (OA, (OE, (OB semidrepte astfel încât D, O, B coliniare, C, A, E în acelaşi semiplan determinat de DB, $OC \perp OE$, (OE bisectoarea lui $\sphericalangle AOB$, $m(\sphericalangle COA) = 38^0$. Aflaţi $m(\sphericalangle DOC)$.

13). Fie $AF \cap EB = \{O\}$, (OD interioară lui $\sphericalangle EOF$ astfel încât $\sphericalangle AOE \equiv \sphericalangle EOD$. Dacă (OC $\perp$ (OD şi $m(\sphericalangle FOC) = 10^0$, aflaţi $m(\sphericalangle AOB)$.

14). Fie (OA$\perp$(OB şi (OC exterioară $\sphericalangle AOB$ astfel încât $\sphericalangle AOC \equiv \sphericalangle BOC$. Dacă E, O, F coliniare, (OE interioară unghiului $\sphericalangle AOB$, $m(\sphericalangle BOE) = 13^0$, aflaţi $m(\sphericalangle FOC)$, $m(\sphericalangle AOC)$.

15). Fie $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle COD$, $\sphericalangle DOE$ şi $\sphericalangle EOA$ unghiuri în jurul unui punct astfel încât $m(\sphericalangle AOC) = 150^0$, $m(\sphericalangle DOB) = 100^0$ şi $OA \perp OE$. Dacă semidreapta opusă lui (OB este bisectoarea lui $\sphericalangle AOE$, aflaţi $m(\sphericalangle EOD)$, $m(\sphericalangle DOC)$, $m(\sphericalangle AOB)$.

16). Se dau $\sphericalangle AOB$ şi $\sphericalangle BOC$ adiacente suplementare astfel încât $m(\sphericalangle BOC)$, reprezintă 1/3 din $m(\sphericalangle AOB)$. Considerând (OD bisectoarea lui $\sphericalangle AOB$ şi $OE \perp AC$, să se afle $m(\sphericalangle DOE)$.

17). Să se afle unghiurile $\triangle MNP$ dacă ele sunt direct proporţionale cu numerele 2, 4, 6. Ce fel de triunghi este ?

18). În $\triangle ABC$ isoscel, $[AB] \equiv [AC]$, (BD bisectoarea lui $\sphericalangle B$ şi $BE \perp AC$. Dacă $m(\sphericalangle DBE) = 15^0$ aflaţi unghiurile $\triangle ABC$.

19). În $\triangle ABC$, $m(\sphericalangle C) = 70^0$, $AD \perp BC$, $m(\sphericalangle BAD) = 30^0$, $E \in AC$ astfel încât $m(\sphericalangle ABE) = 40^0$, $AD \cap BE = \{H\}$. Arătaţi că $CH \perp AB$.

20). Fie $\triangle ABC$ dreptunghic, $m(\sphericalangle A) = 90^0$, M mijlocul lui BC, DM $||$ AC. Dacă $CD \cap AM = \{H\}$ arătaţi că H aparţine medianei corespunzătoare laturii AC.

21). În $\triangle ABC$, $AM \perp BC$, $M \in BC$, AM intersectează bisectoarea lui $\sphericalangle B$ în F şi bisectoarea exterioară a lui $\sphericalangle C$ în E. Dacă $m(\sphericalangle A) = 20^0$, $m(\sphericalangle AEC) = 40^0$, arătaţi că : a). $\triangle ABC$ isoscel; b). unghiurile $\triangle BFM$ congruente cu unghiurile $\triangle MFE$.

22). Fie $\triangle ABC$ isoscel, $[AB] \equiv [AC]$ şi (BD, (CD bisectoarele exterioare pentru $\sphericalangle B$ si $\sphericalangle C$. Să se demonstreze că (AD este bisectoarea lui $\sphericalangle A$.

23). Fie $\triangle ABC$ oarecare, (BD, (CD bisectoarele exterioare pentru $\sphericalangle B$ si $\sphericalangle C$. Să se demonstreze că (AD este bisectoarea lui $\sphericalangle A$.

24). Un $\triangle ABC$ are $m(\sphericalangle A) = 70^0$ şi $E \in$ bisectoarei $\sphericalangle B$ astfel încât $m(\sphericalangle BEC) = 140^0$. Dacă $m(\sphericalangle ABE) = 20^0$, arătaţi că (CE şi (AE sunt bisectoare.

25). În $\triangle ABC$ isoscel, $[AB] \equiv [AC]$, (AD bisectoarea lui $\sphericalangle A$, M mijlocul lui [AB], $BE \perp MD$, $E \in AD$. Demonstraţi că $CE \perp AB$.

26). Fie triunghiul $\triangle ABC$, $[AB] \equiv [AC]$ se consideră mediatoarea AD, $D \in (BC)$, DE $||$ AB, $E \in (AC)$. Să se demonstreze că E este mijlocul laturii AC.

Capitolul XI
PROBLEME PENTRU PREGĂTIREA CONCURSURILOR ŞCOLARE

1. Determinaţi numerele a, b, c ştiind că elementele mulţimii $\{a+b; a+c; b+c\}$ sunt invers proporţionale cu elementele mulţimii $\{6; 4; 3\}$ şi $\frac{23abc}{ab+ac+bc} = 15$.

2. a). Unghiurile A şi B ale triunghiului isoscel ABC sunt direct proporţionale cu 2 şi 4. Aflaţi măsurile unghiurilor $\triangle ABC$. b). Laturile AB şi BC ale triunghiului isoscel ABC sunt invers proporţionale cu 3 şi 5. Ştiind că perimetrul triunghiului este egal cu 143 cm, aflaţi lungimile laturilor triunghiului ABC. ***prof. Matrosenco Elena***

3. Se consideră patru numere a, b, c, d astfel încât a este 20% din b, b este 20% din c iar c este 20% din d. Să se determine numerele a, b, c, d ştiind că $\sqrt{a\cdot b\cdot c\cdot d} = d$.

4. Pe o dreaptă (d) se consideră o sută de puncte $A_1, \ldots, A_{100}$, distincte două câte două. Câte segmente determină aceste puncte pe dreapta (d) ? Dacă lungimea segmentului (A_1A_{100}) este a cm, ce lungime va avea suma segmentelor obţinute ? ***prof. Udrea Tatiana***

5. Determină $x, y \in Z$ care verifică relaţia $3\cdot|x-y+5| + |-7|\cdot(y-3)^2 = 0$.

6. Lungimile laturilor patrulaterului convex ABCD verifică relaţiile: AB = 15 cm, BC = 4/3 · AB, AD + CD = 90 cm şi AD = 5/4 · CD. Calculează perimetrul patrulaterului şi lungimile laturilor sale.

prof. Modoiu Cristina

7. O familie cu 2 copii urmează să se aşeze în acelaşi timp la o masă pătrată de 4 locuri. Calculează probabilităţile următoarelor evenimente : E_1 - părinţii să se aşeze alături; E_2 - părinţii să se aşeze faţă în faţă; E_3 - copiii să nu stea alături

8. Diferenţa măsurilor a două unghiuri complementare este de 36^0. Află măsurile suplementelor lor.

prof. Modoiu Marius

9. Fie $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \ldots + \frac{1}{4010006}$ şi $B = \left(\frac{1}{2003}\right)^0 + \left(\frac{1}{2003}\right)^1$. Să se afle media aritmetică.

10. Dacă numerele x şi y sunt direct proporţionale cu 2 şi a, a prim, şi suma pătratelor numerelor x şi y reprezintă 216,(6)% din produsul lor, să se afle a. ***prof. Neagoe Cristina***

11. Aflaţi trei numere naturale direct proporţionale cu 17, 6 şi 10 ştiind că cel mai mic multiplu comun al lor este 420.

12. Fie unghiurile $\sphericalangle xoy$ şi $\sphericalangle xoz$ neadiacente suplementare şi (OA şi (OB bisectoarele lor. Dacă $m(\sphericalangle AOB) = 32^0$ să se afle măsurile $\sphericalangle xoy$ şi $\sphericalangle xoz$. ***prof. Manea Ioana***

13. Se dau numerele naturale x, y, z astfel : $x = \left(4^{1003}\cdot 25\cdot 3^{3^3}\right) : 2^{2004} : 5 : \left(3^{13}\right)^2$; $y = 10101_{(2)}$; $z = \overline{ab}$, $a < b$ şi $\overline{ab}$ este cel mai mic număr natural divizibil cu 5. Calculaţi : a). (x; y; z), [x; y; z]; b). (x; x – z), [x; y + z]; c). Spuneţi cât la sută reprezintă numărul z din x; dar numărul y din [x; y] ?

14. Se dau punctele coliniare A, O, B, $O \in (AB)$. De aceeaşi parte a dreptei AB se consideră punctele C şi D astfel încât $\sphericalangle AOC \equiv \sphericalangle COD \equiv \sphericalangle DOB$, iar $[OA] \equiv [OC] \equiv [OD] \equiv [OB]$. Perpendiculara CT pe AB ($T \in (AO)$) intersectează semidreapta [BD în M, iar perpendiculara DP pe AB ($P \in (OB)$) intersectează semidreapta [AC în N. Demonstraţi : a). $[CO] \equiv [ED]$ unde $\{E\} = BM \cap AN$; b). $\triangle MEC \equiv \triangle NED$. ***prof. Dincă Georgeta***

Giurgiu

15). Se dau x, y, z, t, patru unghiuri în jurul unui punct. Ştiind că {2x; 4y; 3z; 5t} direct proporţională cu {4; 12; 6; m}, unde m este un număr natural, să se determine m, x, y, z, t, dacă x + z = y + t.

16). Pe o drepată d se consideră punctele A, B, C, D, K, M, L, în această ordine astfel încât AB = BC = CD şi DK = KM = ML. a). lungimea segmentelor (CK) şi (BM). b). lungimea segmentului (AB) în cazul în care C este mijlocul segmentului (AL). ***prof. Scarlat Carmen***

Pucioasa

SOLUŢII
ALGEBRĂ

***Capitolul I*: Mulţimea numerelor naturale.**

** §1) a) C = 3, R = 30; b) C = 59, R = 1; c) C = 154, R = 17; d) C = 455, R = 98; e) C = 203, R = 5. §2) a) 9; b) 1; c) 3; d) 2806; e) 2; f) 3; g) 0. §3) a) 3; b) 3; c) 1.

Divizibilitatea : ** §2). a). Nu, $15 \vdots 3$ şi $15 \not\vdots 9$; b). $12 \vdots 2$ şi $12 \not\vdots 9$; c). $18 \vdots 9$; d). $21 \vdots 3$, $21 \not\vdots 9$. §3) a) 210; 212; 214; 216; 218; b) 423; 453; 483; c) 1200; 1204; 1208; d) 720; 725; e) 8001; 8091; f) 2232; 2838; g) 3108; 3120; 3132; 3144; 3156; 3168; 3180; 3192; h) 1458; i) 5000; 5220; 5440; 5660; 5880; j) 4215; 4245; 4275. §4).a). prim; b). compus 1, 5, 19, 95; c). 1, 3, 41, 123; d). 1, 5, 23, 115; e). 1, 11, 113, 1243; f). 1, 17, 113, 1921; g). 1, 7, 11, 17, 77, 119, 187, 1309. **§5).** 32 şi 21. **§7).** a). x ∈ {3, 5, 9}; b). x ∈ {1, 3, 7, 9}; c). x ∈ {1, 3, 7, 9}; d). x ∈ {1, 3, 7, 9}; e). x ∈ {1, 3, 5, 7, 9}; f). x ∈ {1, 5, 7}; g). x ∈ {2, 3, 6, 8, 9}. **§8).** A = {1, 2, 4}. **§9).** a). Nu, pentru că primul se va divide cu 3 şi cu 2 dacă se divide cu 6 şi al doilea se va divide cu 3 => 3 este divizor comun; b). Nu, pentru că 12 şi orice multiplu de 4 au divizor comun pe 4. **§10).** a). $\overline{435y} \vdots 2$ => 4350, 4352, 4354, 4356, 4358, le alegem pe cele care se divid cu 3 : 4350 şi 4356; b).1260, 1242, 1224, 1206, 1296, 1278; c). 6750, 6255; d). 648; e). 4212, 4512, 4812, 4116, 4416, 4716; f).135, 435, 735, 330, 630, 930; g). 2420, 2440, 2460, 2400, 2480; h). 3420, 8424, 4428; i).225; j).8700, 8750. **§11).** a). 3/36; b). Nu; c). Nu, 5/(14 – 4); d). Nu, 6/(20 + 4). **§12).** b).A; c).A d). F; e). A; f). A; g). A; h). F; i). F; j). F; k).A; l). F; m). A; n). A; o). F; p). A; r). F; s). A. **§16).** d). $\frac{4n+3}{2n+1}$ să presupunem că e reductibilă => se simplifică cu un număr > 1 => a | (4n + 3) şi a | (2n + 1) => a / 2(2n + 1) => a / [4n + 3 – 2(2n + 1)] => a / (4n + 3 – 4n – 2) => a / 1 => a = 1=> fracţia este ireductibilă; g). presupunem că fracţia este reductibilă => a / (4n + 3) şi a / (5n + 4) => a / 5(4n + 3) şi a / 4(5n + 4) => a / [4 ·(5n + 4) – 5(4n + 3)] => a / (20n + 16 – 20n – 15) => a / 1 => a = 1 => fracţie ireductibilă.

Descompunerea în factori. C.m.m.d.c. şi c.m.m.m.c. : * §2). b). 4; c). 12 d). 9; e). 6; f). 5 g). 5; h). 2; i). 6. §3). 45; c). 24; d). 36; e). 48; f). 42; g). 72; h). 108; i). 72; j). 144; k). 150. §4). a). 1; b). 18 c). 450; d). 1; e). 1; f). 30; g). 180; h). 1. §5). a). $2 \cdot 5^2 \cdot 11$ = 550; b). 6; c). 20; d). 25; e). 8; f). 5; g). 14; h). 48; i). 18; j). 28; k). 81; l). 33. §6). $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$ = 2700; b). $2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11$ = 1386; c). 36; d). 72; e). 108; f). 70; g). 675; h). 56; i). 60; j). 420; k). 36300; l). 12960; m). 35280. **§8)** a) 4200; 20; b) 1470; 21; c) 317520; 4; d) 1650; 1. ** **§9).** A= 27, B = 32, (A, B) = 1, [A, B] = 864. **§10).** a). 4 · 72 = 288; b). A = 20 şi B = 160, (A, B) · [4, 6] = 20 · 12 = 480. **§11)** 12; 144. **§12)**12. **§14).** Notăm cu x numărul căutat şi scriem teorema împărţirii cu rest pentru ambele împărţiri: x = 5 · c_1 + 1 şi x = 7 · c_2 + 1 => x – 1 = 5 · c_1 şi x – 1 = 7 · c_2 => x – 1 este multiplu pentru 5 şi 7. Cum ni se cere cel mai mic => x – 1 = c.m.m.m.c. 5, 7 => x – 1 = 35 => x = 36. **§15).** x = 18 · c_1 + 15, x = 72 · c_2 + 15, x = 60 · c_3 + 15 => x – 15 = 18 · c_1 , x – 15 = 72 · c_2 , x – 15 = 60 · c_3 => x – 15 = multiplu comun pentru 18, 72 şi 60, cum c.m.m.m.c. = 360 = x – 15 = 360 => x = 375. **§16).** [5, 6, 8] = 120 => cel mai mic x – 3 este 120, alţi multiplii ai lui 120 sunt: 240, 360, 480, etc. Cum trebuie să fie mai mici ca 300 => x – 3 = 120 => x = 123 şi x – 3 = 240 => x = 243. **§17).** [24, 18, 20] = 360, x – 9 = 360 => x = 369 şi x – 9 = 720 => x = 729. **§18).** fie x acest număr, scriem teorema împărţirii cu rest 245 = x · c_1 + 5 şi 296 = x · c_2 + 8 => 245 – 5 = x · c_1 şi 296 – 8 + x · c_2 => 240 = x · c_1 şi 288 = x · c_2 => x este divizor comun peste 240 şi 288 mai mare decât resturile 5 şi 8 (pentru că x este împărţitor şi împărţitorul trebuie să fie mai mare decât restul). Cum ni se cere cel mai mare x => aflăm cel mai mare divizor comun pentru 240 şi 288 => x = 48. **§19).** 1092 = x · c_1 + 12, 1792 = x · c_2 + 28, 1619 = x · c_3 + 35 => 1080 = x · c_1 ; 1764 = x · c_2; 1584 = x · c_3 ; (1080, 1764, 1584) = 36. **§20).** 297 = x · c_1 + 9 şi 319 = x · c_2 + 7 => 288 = x · c_1 , 312 = x · c_2 , (288, 312) = 24 => trebuie să găsim toţi divizorii comuni pentru 288, 312 mai mari ca 9 şi 7; cel mai mare este 24 => 24, 12. **§21).** (120, 504, 1584) = 24 => x ∈ {24, 2}. **§22).** (1364, 1302, 1550) = 62 => x ∈ {62, 31} => vor fi în acelaşi loc după 15 m şi se vor mai întâlni din 15 în 15 m => se vor întâlni de 6 ori. Se observă din desen că distanţa dintre locul primei întâlniri şi locul unde au început este multiplu de trei şi 5 => este c.m.m.d.c. => [3, 5] = 15, 100 : 15 = 6 rest 10 => de 6 ori. **§23).** Desenăm puieţii plantaţi de cei doi copii :

• __3___ • __3___ • __3___ • __3___ • __3___ • _____ • _____ • _____ • _____

• _____5_____ • _____5_____ • ______5______ • ____________ • __________

§24). Notăm numărul de pachete cu x şi c_1 = câte ciocolate sunt într-un pachet, c_2 = câte bomboane sunt într-un pachet, c_3 = câte napolitane sunt într-un pachet => 282 = x · c_1 + 2, 715 = x · c_2 + 15, 424 = x · c_3 + 4 => 280 = x · c_1, 700 = x – c_2 420 = x · c_3 => x divizor => (280, 700, 420) = 140 pachete. **§25).** x = numărul elevilor => x se divide cu 2, 3 şi 5 => [2, 3, 5] = 30 cum într-o clasă nu pot fi mai mult de 30 (60, 90, 120, etc.) => sunt 30 elevi. **§26).** a). $\overline{9xy} \vdots 18$ => 900, 990, 972, 954, 936, 918 => cel mai mare este 990; b). $\overline{11xy} \vdots 75$ => 1125; c). $\overline{1xy} \vdots 12$ => 120, 180, 132, 192, 144, 184, 156, 108, 168 => cel mai mic = 108; d). $\overline{9xy} \vdots 15$ => 915, 945, 975, 900, 930, 960, 990 => cel mai mare = 990.

§27). $x = 2 \cdot c_1 + 1$, $x = 3 \cdot c_2 + 1$, $x = 4 \cdot c_3 + 1$, $x = 5 \cdot c_4 + 1 \Rightarrow [2, 3, 4, 5] = 60 \Rightarrow x - 1 = 60 \Rightarrow x = 61$. **§28).** b). $345 = 3 \cdot 5 \cdot 23 \Rightarrow$ numerele pot fi : $3 \cdot 5$ şi 23; $3 \cdot 23$ şi 5; $5 \cdot 23$ şi 3 sau 345 şi 1; c). $56 = 2^3 \cdot 7$, prime între ele sunt 8 şi 7; d). $48 = 2^4 \cdot 3$, perechile pot fi 2,24; 4,12; 3,16; 6,8 $(2,24) = 2$; $(4, 12) = 4$; $(3, 16) = 1$; $(6, 8) = 2 \Rightarrow$ singura pereche care are c.m.m.m.d.c = 4 este 4 şi 12. **§29).** $x = 3 \cdot c_1 + 2$; $x = 8 \cdot c_2 + 7$; $x = 11 \cdot c_3 + 10$ vom aduna numărul 1 în ambii membrii la fiecare relaţie $\Rightarrow x + 1 = 3 \cdot c_1 + 2 + 1$; $x + 1 = 8 \cdot c_2 + 7 + 1$, $x + 1 = 11 \cdot c_3 + 10 + 1 \Rightarrow x + 1 = 3 \cdot c_1 + 3$, $x + 1 = 8 \cdot c_2 + 8$, $x + 1 = 11 \cdot c_3 + 11 \Rightarrow x + 1 = 3(c_1 + 1)$, $x + 1 = 8 \cdot (c_2 + 1) - x + 1 = 11(c_3 + 1) \Rightarrow x + 1$ este multiplu comun pentru 3, 8 şi 11 $\Rightarrow [3, 8, 11] = 264 \Rightarrow x + 1 = 264 \Rightarrow x = 263$. **§30).** notând cu x numărul căutat : $x = 8 \cdot c_1 + 6$, $x = 5 \cdot c_2 + 3$, $x = 3 \cdot c_3 + 1$, adunăm numărul 2 în ambii membrii $\Rightarrow x + 2 = 8 \cdot c_1 + 6 + 2$, $x + 2 = 5 \cdot c_2 + 3 + 2$, $x + 2 = 3 \cdot c_3 + 1 + 2 \Rightarrow x + 2 = 8 \cdot (c_1 + 1)$; $x + 2 = 5 \cdot (c_2 + 1)$, $x + 2 = 3 \cdot (c_3 + 1) \Rightarrow x + 2$ este multiplu pentru 8, 5 şi 3 $\Rightarrow x + 2 = [8, 5, 3] = 120 \Rightarrow x = 118$. **§31).** dacă c.m.m.d.c. = 24 => cele două numere se divid cu 24 => ele vor fi multiplii pentru 24 => căutăm multiplii lui 24 : 0, 24, 48, 72, 96, 120, 144, 168. Cum suma lor este 168 => perechile pot fi : 0 şi 168 , c.m.m.d.c. = 168 => nu sunt bune : 24 şi 144, c.m.m.d.c. = 24 bune; 48 şi 120 , c.m.m.d.c. = 24 bune; 72 ş 96, c.m.m.d.c. = 24 bune sau altfel; c.m.m.d.c. lor este 24 => numerele pot fi notate : $24 \cdot a$ şi $24 \cdot b$ cu a şi b prime între ele $\Rightarrow 24a + 24b = 168 \Rightarrow 24 \cdot (a + b) = 168 \Rightarrow a + b = 168 : 24 \Rightarrow a + b = 7$, deci trebuie să găsim a şi b prime între ele cu suma 7 => $a = 1$ şi $b = 6$, $a = 2$ şi $b = 5$; $a = 3$ şi $b = 4$ ($a = 0$ şi $b = 7$ nu sunt prime între ele) => pentru $a = 1$ şi $b = 6 \Rightarrow 24a = 24$, $24b = 144$; $a = 2$, $b = 5 \Rightarrow$ 48 şi 120; $a = 3$, $b = 4 \Rightarrow$ 72 şi 96. **§32).** a). dacă c.m.m.d.c. este 2 => numerele sunt multiple de 2 => sunt pare => căutăm două numere pare cu produsul 48 => 24 şi 2; 12 şi 4; 6 şi 8; dar şi 12 şi 4 au c.m.m.d.c. = 4 => rezultatele corecte 24 şi 2; 6 şi 8; (astfel: c.m.m.d.c. = 2 => 2a şi 2b sunt cele două numere unde b şi a sunt prime între ele $\Rightarrow 2a \cdot 2b = 4ab = 48 \Rightarrow ab = 12 \Rightarrow a = 1$ $b = 12$; $a = 3$ şi $b = 4$ => numerele = 2 şi 24, 6 şi 8); b). la fel => 2, 2, 24; 2, 4, 12; 4, 4, 6; 2, 6, 8. **§37)** 24. **§38)** 3. *** **§42).** a). $a + 3b + 9c = 111$ cum 3b, 9c şi 111 se divid cu 3 => a se divide cu 3, dar a prim $\Rightarrow a = 3 \Rightarrow 3 + 3b + 9c = 111 \Rightarrow 3b + 9c = 111 - 3 \Rightarrow 3(b + 3c) = 108 \Rightarrow b + 3c = 36$ cum 3c şi 36 se divid cu 3 => b se divide cu 3, dar b este prim $\Rightarrow b = 3 \Rightarrow 3 + 3c = 36 \Rightarrow 3c = 36 - 3 \Rightarrow 3c = 33 \Rightarrow c = 11$; b). la fel $a = 5$, $b = 7$, $c = 3$; c). la fel $a = 5$, $b = 2$, $c = 13$. **§43)** a) $2^n + 2^{n+1} = 2^n + 2^n \cdot 2 = 2^n(1 + 2) = 2^n \cdot 3 \vdots 3$; c) $4^n - 2^{2n+2} - 4^{n+1} = 2^{2n} - 2^{2n} \cdot 2^2 - 2^{2n} \cdot 4 = = 2^{2n}(1 - 2^2 - 4) = 2^{2n}(-7) \vdots 7$; f) $2^{n+1} \cdot 5^n + 2^n \cdot 5^{n+2} = 2^n \cdot 2 \cdot 5^n + 2^n \cdot 5^n \cdot 5^2 = 2^n \cdot 5^n \cdot (2 + 5^2) = 2^n \cdot 5^n \cdot 27 = 10^n \cdot 27 = 10^{n-1} \cdot 270 \vdots 90$. **§44)** a) $\overline{aba} = 100a + 10b + a = 101a + 20a = 121a \vdots 11$. **§45).** $132 = 11 \cdot 2^2 \cdot 3$; $378 = 2 \cdot 3^3 \cdot 7$, c.m.m.d.c.$= 2 \cdot 3 = 6 \Rightarrow (\overline{4x}, 6) = 1 \Rightarrow x \in \{1, 3, 7, 9\}$.

Capitolul II : Numere raţionale pozitive

Aducerea fracţiilor la acelaşi numitor : * §1). a). $\frac{4}{6}; \frac{5}{6}; \frac{21}{6}$; b). $\frac{25}{10}; \frac{2}{10}; \frac{7}{10}$; c). $\frac{3}{12}; \frac{18}{12}; \frac{4}{12}$; d). $\frac{7}{12}; \frac{8}{12}; \frac{18}{12}; \frac{10}{12}$; e). $\frac{8}{28}; \frac{6}{28}; \frac{7}{28}$; f). $\frac{8}{24}; \frac{30}{24}; \frac{3}{24}$; g). $\frac{15}{20}; \frac{10}{20}; \frac{14}{20}$; h). $\frac{3}{28}; \frac{20}{28}; \frac{22}{28}$; i). $\frac{9}{21}; \frac{7}{21}; \frac{5}{21}$; j). $\frac{3}{15}; \frac{10}{15}; \frac{4}{15}$; k). $\frac{8}{24}; \frac{9}{24}; \frac{20}{24}$; l). $\frac{25}{30}; \frac{21}{30}; \frac{15}{30}; \frac{40}{30}$; m). $\frac{28}{35}; \frac{1}{35}; \frac{10}{35}$ n). $\frac{2}{24}; \frac{7}{24}; \frac{3}{24}$; o). $\frac{4}{36}; \frac{24}{36}; \frac{18}{36}; \frac{45}{36}; \frac{66}{36}$; p). $\frac{4}{22}; \frac{11}{22}; \frac{3}{22}$; r). $\frac{7}{56}; \frac{12}{56}; \frac{10}{56}; \frac{8}{56}$; s). $\frac{6}{48}; \frac{15}{48}; \frac{16}{48}$; t). $\frac{16}{12}; \frac{6}{12}; \frac{9}{12}$; u). $\frac{30}{36}; \frac{18}{36}; \frac{27}{36}$; v). $\frac{4}{20}; \frac{30}{20}; \frac{5}{20}$; **§2).** a). $\frac{3}{10}; \frac{4}{10}; \frac{25}{10}$; b). $\frac{1}{24}; \frac{16}{24}; \frac{15}{24}; \frac{14}{24}$; c). $\frac{21}{18}; \frac{10}{18}; \frac{66}{18}; \frac{45}{18}$; d). $\frac{26}{30}; \frac{7}{30}; \frac{48}{30}; \frac{15}{30}$; e). $\frac{9}{48}; \frac{36}{48}; \frac{30}{48}; \frac{8}{48}; \frac{72}{48}; \frac{40}{48}$; f). $\frac{28}{36}; \frac{11}{36}; \frac{15}{36}; \frac{81}{36}; \frac{26}{36}$. ** §3).a). $\frac{21}{48}, \frac{32}{48}, \frac{40}{48}$; b). $\frac{70}{100}, \frac{75}{100}, \frac{8}{100}$; c). $\frac{6}{196}, \frac{4}{196}, \frac{343}{196}$; d) $\frac{14}{441}, \frac{36}{441}, \frac{196}{441}$; e). $\frac{6}{12}, \frac{9}{12}, \frac{10}{12}, \frac{8}{12}$; f). $\frac{9}{12}, \frac{4}{12}, \frac{14}{12}, \frac{30}{12}$; g). $\frac{54}{144}, \frac{9}{144}, \frac{40}{144}$; h). $\frac{3}{36}, \frac{42}{36}, \frac{12}{36}, \frac{45}{36}$; i). $\frac{65}{120}, \frac{21}{120}, \frac{16}{120}, \frac{36}{120}$; j). $\frac{10}{165}, \frac{36}{165}, \frac{44}{165}, \frac{75}{165}$; k). $\frac{24}{84}, \frac{3}{84}, \frac{18}{84}, \frac{32}{84}$; l). $\frac{90}{100}, \frac{35}{100}, \frac{48}{100}, \frac{82}{100}, \frac{13}{100}$; m). $\frac{120}{360}, \frac{165}{360}, \frac{140}{360}, \frac{300}{360}, \frac{102}{360}$. **§4).** a). $\frac{1}{6} < \frac{2}{3} < \frac{5}{4}$; b) $\frac{2}{9} < \frac{5}{6} < \frac{4}{3} < \frac{3}{2}$; c). $\frac{3}{7} < 1 < \frac{15}{14} < \frac{5}{2}$; d). $\frac{7}{6} < \frac{9}{4} < \frac{5}{2} < \frac{10}{3}$; e). $\frac{17}{600} < \frac{13}{300} < \frac{8}{150} < \frac{11}{200}$; f). $\frac{2}{33} < \frac{29}{165} < \frac{13}{55}$.

Introducerea şi scoaterea întregilor : * **§2).** a). 10 : 7 ne dă câtul 1 rest 3 => $\frac{10}{7} = 1\frac{3}{7}$; b). $1\frac{1}{2}$; c). $2\frac{2}{5}$; d). $2\frac{4}{7}$; e). $8\frac{1}{3}$; f). $9\frac{1}{3}$; g). $3\frac{14}{30}$.

Ordonarea numerelor raţionale : *§1). a). $\frac{3}{4} < \frac{5}{4}$; b). $\frac{3}{8} < \frac{5}{8}$; c). $\frac{4}{3} > \frac{4}{5}$; d). $\frac{7}{2} > \frac{7}{3}$; e). $\frac{3}{4} > \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$; f). $\frac{4}{3} > \frac{6}{5}$; g). $2\frac{1}{3} > 2\frac{1}{5}$; h). $3\frac{4}{9} < 3\frac{5}{10}$; i). $5\frac{9}{12} = 5\frac{6}{8}$; j). $6\frac{1}{2} > 5\frac{3}{4}$; k). $\frac{13}{3} < \frac{27}{4}$. **§2). a). F; b). A; c). A; d). A; e). A; f). A; g). A h). F; i). A. §3) a) $\frac{1}{8} < \frac{1}{6} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{5} < \frac{3}{5} < 2 < \frac{12}{5} < 3\frac{1}{5} < \frac{41}{5}$; c) $\frac{7}{15} < \frac{2}{3} < \frac{4}{5}$; d) $\frac{1}{4} < \frac{5}{16} < \frac{3}{8} < 1 < \frac{7}{2}$; e). $\frac{1}{10} < \frac{4}{15} < \frac{7}{10} < 1 < 1\frac{1}{10} < \frac{6}{5}$. §4). a). $\frac{x}{2} < \frac{7}{2} \Rightarrow x < 7 \Rightarrow x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; b). $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; c). $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$; d). $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; e). $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$; f). $x + 2 \le 5 \Rightarrow$

$x \le 3 \Rightarrow x \in \{0, 1, 2, 3\}$; g). $x+5 \le 7 \Rightarrow x \le 2 \Rightarrow x \in \{0, 1, 2\}$; h). $3x \le 9 \Rightarrow x \in \{0, 1, 2, 3\}$ i). $3x \le 6 \Rightarrow x \in \{1, 2\}$; j). $\frac{x}{4} < \frac{10}{4}$; k). $\frac{2x}{6} < \frac{7}{6} \Rightarrow 2x \le 7, x \le \frac{7}{2} \Rightarrow x \in \{0, 1, 2, 3\}$; l). $\frac{6}{9} \le \frac{x}{9} \Rightarrow x \le 6 \Rightarrow x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; m). $\frac{7}{4} > \frac{2x}{4} \Rightarrow 2x < 7 \Rightarrow x \in \{0, 1, 2, 3\}$; n). $\frac{2x}{6} < \frac{21}{6} \Rightarrow x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Adunarea şi scăderea în Q : * §2) a) 11/12; b) 22/5; c) 53/12; d) 7/2; e) 8/15; f) 68/9; g) 1/2; h) 1/6; i) 143/24; j) 35/18; k) 149/84. ** §7). a). A; b). F; c). A; d). A; e). F; f). A. **§8).** a). $\frac{7}{12}$; b). $\frac{7}{6}$; c). $\frac{5}{16}$; d). $\frac{21}{8}$; e). $\frac{14}{20}=\frac{7}{10}$; f). $\frac{1}{24}$; g). $\frac{95}{21}$; h). $\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$; i). $\frac{30}{22}=\frac{15}{11}$; j). $\frac{1}{2}$; k). $\frac{1}{2}$; l). $\frac{91}{30}$; m). $\frac{1}{5}$; n). $\frac{37}{40}$. **§9).** a). $\frac{1}{2}$; b). $\frac{1}{30}$; c). $\frac{9}{40}$; d). $\frac{1}{2}$; e). $\frac{14}{5}$. *** §11). a). a = 4; b). a = 3; c). a = 5. **§13).** $8\frac{1}{2}$ litri . **§14).** $\frac{5}{27}$. **§15).** $7\frac{2}{6}$. **§16).** $\frac{4}{11}$.

Împărţirea : * §1). a). 2; b). 15; c). $\frac{1}{8}$; d). $\frac{11}{10}$; e). $\frac{2}{3}$; f). 40; g). 3; h). $\frac{31}{100}$; i). 10; j). $\frac{2}{3}$; k). $\frac{3}{2}$; l). 2; m). 3; n). 35; o). $\frac{98}{53}$; p). $\frac{3}{16}$; r). $\frac{4}{3}$; s). $\frac{8}{5}$. §2). a). $\frac{3}{2}$; b). 6; c). 6; d). $\frac{1}{12}$; e). $\frac{1}{4}$; f). $\frac{1}{21}$; g). $\frac{3}{2}$; h). $\frac{1}{10}$; i). $\frac{2}{3}$; j). $\frac{18}{5}$; k). $\frac{2}{7}$; l). $\frac{2}{3}$.

** §3). a). $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{5}{6}} = \dfrac{\frac{3}{6}+\frac{2}{6}}{\frac{5}{6}} = \dfrac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = \frac{5}{6}:\frac{5}{6} = 1$; b). $\frac{1}{7}$; c). $\frac{3}{2}$; d). 3; e). $\frac{4}{27}$; f). $\frac{3}{2}$; g). 25; h). $\frac{7}{2}$; i). 1; j). $\frac{19}{3}$; k). $\frac{25}{7}$.

Ordinea efectuării operaţiilor : ** §1) a) 2; b) 3/2; c) 43/11; d) 1/2; e) 249/10; f) 17/18; g) 5/28; h) 2/27. **§5)** a) 5,96; b) 1,81; c) 1,82; d) 0,51; e) 0,98; f) 1,32; g) 0,85; h) 17,64; i) 3,7; j) 1,085; k) 0,48; l) 15. **§6)** a) 4; b) 0,23; c) 1; d) 0,05; e) 0,2; f) 0,5; g) 8/11 = 0,7(27); h) 1; i) 10/18 = 0,(5); j) 0; k) 0; l) 9. **§7)** a) 23; b) 0,21; c) 16/7; d) 3,2; e) 10/9; f) 5; g) 0,06; h) 5,7; i) 1; j) 2/3. **§8)** a) 7; b) 1/2; c) 1; d) 37/36; e) 3; f) 34/5; g) 15/11. **§9)** A = {11}; B = {5; 7; 11; 13}; C = {12; 15}; D = {2; 5; 8}; $(A-B) \cup (C \cap D) = \varnothing$; $(B \cap D) \cup (A \cap B) = \{11\}$; $(C-A)-(C-B) = \varnothing$. **§10)** 3/5 si 8/5. **§11)** 21.

Fracţii periodice : * §1). a). 0,(6); b). 2,(3); c). 0,(4); d). 2,1(6); e). 0,0(6); f). 1,(428571); g). 0,(27); h). 0,2(27); i). 0,3(8); j). 0,69(4); k). 0,91(6). §2). $\frac{2}{9}; \frac{8}{9}; 1\frac{4}{9}; \frac{14}{99}; \frac{7}{999}$; $3\frac{3}{11}; \frac{49}{90}$; $\frac{141}{330}; 1\frac{7}{330}$

Media aritmetică ponderată : ** §4) 9. §5) 56,(6) km/h. §6) 7000 lei. §7) 1,355 m. §8) 8 minute. §13) 6; 3. §14) 111.

Ecuaţii : ** §1). a). $\frac{3}{5}$; b). 0; c). $\frac{2}{3}$; d). $\varnothing$; c). $\frac{3}{5}$; f). $3\frac{1}{2}$; g). $\varnothing$; h). $\varnothing$. §2). a). $\frac{7}{4}$; b). $\frac{5}{8}$; c). $\frac{7}{9}$; d). $\frac{1}{3}$; e). $1\frac{1}{4}$; f). $4\frac{3}{8}$; g). $\frac{1}{2}$; h). $\frac{1}{24}$; i). $\frac{1}{5}$; j). $\frac{2}{3}$; k). 6; l). 30; m). 2; n). 6; o). $\frac{5}{7}$. §3). a). $\frac{3}{4}$; b). 11; c). $\frac{1}{10}$; d). $\frac{20}{3}$ e). $\frac{13}{90}$; f). $\frac{1}{5}$; g). $\frac{55}{12}$; h). $\frac{92}{9}$; i). $\frac{5}{12}$; j). $1\frac{7}{24}$; k). $\frac{1}{8}$; l). $\frac{3}{2}$; m). 15; n). $\frac{5}{24}$; o). $\frac{5}{28}$. §4). a). $\frac{1}{19}$; b). $\frac{15}{2}$; c). $\frac{1}{9}$; d). 23; e). $\frac{2}{11}$; f). $\frac{3}{4}$; g). 0; h). 1. *** §6). a). $\frac{37}{16}$; b). $\frac{3}{5}$; c). 0; d). $\frac{1}{8}$ e). $\frac{17}{4}$ f). 1; g). $\frac{5}{4}$; h). 3; i). $\frac{1}{8}$; j). $\frac{3}{8}$. §7). a). 5; b). $\frac{75}{14}$; c). 7; d). $\frac{9}{2}$; e). $\frac{84}{11}$; f). $\frac{5}{6}$; g). $\frac{10}{39}$; h). 3; i). $\frac{29}{12}$; j). $\frac{1}{2}$; k). $\frac{180}{7}$; l). 18; m). 8; n). 2 ; o). 20; p). 6; r). 0.

Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuaţiilor : **§1).** 11 răţuşte. **§2).** 18 premii. **§3).** 489 kg. **§4).** 75 kg. **§5).** 24 litri. **§6).** 36 km. **§7).** a). $\frac{2}{5} \cdot x = 8 \Rightarrow x = 8 \cdot \frac{5}{2} = 20$; b). $\frac{17}{2}$; c). 1. **§8).** a). $16 \cdot \frac{3}{2} = 24$; b). 30; c). 15. **§9).** $\frac{1}{2} \cdot 54 \cdot \frac{9}{4} = \frac{243}{4}$; b). $\frac{28}{3}$; c). 45; d). $\frac{15}{4}$. **§10).** a). $1\frac{7}{8}$; b). $4\frac{29}{40}$; c). $\frac{73}{27}$; d). $\frac{1}{2}$; e). $\frac{7}{8}$. **§11).** a). dacă unul este x $\Rightarrow x + \frac{3}{8}$ este al doilea $\Rightarrow x + x + \frac{3}{8} = 30\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{241}{16}$ şi $\frac{247}{16}$; b). x = suma de bani, $x - 2000\frac{1}{2} + x = 10000 \Rightarrow x = \frac{24100}{4}$. **§12).** $1673 \cdot \frac{8}{7} = 1912$ lei; **§13).** $24 \cdot \frac{3}{2} = 36$ elevi. **§14).** $12 \cdot \frac{7}{6} = 14$. **§15).** $324 \cdot \frac{11}{4} = 891$ ha . **§16).** $4 \cdot \frac{9}{2} = 18$ litri lapte. §17). $33 \cdot \frac{12}{11} = 36$ kg grâu. **§18).** notăm cu x = suma pe care a avut-o $\Rightarrow \frac{2}{3}x + 700 = x \Rightarrow x = 2100$ lei a avut şi 2100 – 700 = 1400 a cheltuit. **§19).** $12 + \frac{4}{7}x = x \Rightarrow$ 28 km; 28 – 12 = 16 km. **§20).** $\frac{3}{5}x + 12 = x \Rightarrow x =$ 30; 30 – 12 = 18 băieţi. **§21).** $15 + \frac{1}{6}x = x \Rightarrow x = 18$; 18 – 15 = 3. **§22).** $\frac{1}{11}x + 30 = x \Rightarrow x = 33$; 33 – 30 = 3 corijenţi. **§23).** $\frac{2}{15}x + \frac{4}{9}x + 1900 - x \Rightarrow x = 4500$. **§24).** $\frac{3}{7}x + \frac{2}{5}x + 720 = x \Rightarrow x - 4200$. **§25).** I zi : $\frac{1}{5}x$; restul $x - \frac{1}{5}x = \frac{4}{5}$; II zi : $\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5}x = \frac{1}{5}x \Rightarrow \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}x + 1800 = x \Rightarrow x = 3000$. **§26).** Dacă notăm vârsta ci $x \Rightarrow \frac{3}{4} \cdot x$ celălalt $\Rightarrow x + \frac{3}{4}x = 21 \Rightarrow x = 12$, 21 – 12 = 9. **§27).** X = unul, $\frac{5}{6}x$ este celălalt $\Rightarrow x - \frac{5}{6}x = 24 \Rightarrow x = 144$, $144 \cdot \frac{5}{6} = 120$. **§28).** x numărul =>

$\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x=420 \Rightarrow x = 630$. **§29).** $\frac{2}{7}\cdot 1960=560$; 1960 – 560 = 1400. **§30).** x = drumul, $270=\frac{3}{5}x \Rightarrow x - 450$; I zi = $\frac{2}{9}\cdot 450=100$, II zi = 280, III zi = 450 – 100 – 270 = 80 km. **§31).** $\frac{2}{3}\cdot 36=24$ la muzeu, $\frac{3}{4}\cdot 36=27$ la teatru. Cel mai mare număr de elevi care merg la muzeu şi la teatru = 24 elevi. Cel mai mic = – 36 – 27 – 9 elevi care nu au fost la teatru dar au fost la muzeu => 24 – 9 = 15 care au fost şi la teatru şi la muzeu. **§32).** $\frac{1}{2}\cdot 102+\frac{3}{17}\cdot 102-51+18=69$. **§33).** x = drumul $\Rightarrow \frac{3}{7}x+10=\frac{1}{2}x \Rightarrow x=140$ km. **§34).** x = suma de bani => $\frac{4}{9}x+1500=\frac{1}{2}x \Rightarrow \frac{1}{2}x \Rightarrow$ x = 27000 lei. **§35).** x = norma $\Rightarrow \frac{4}{10}x+112=x-\frac{1}{3}x \Rightarrow x=420$ piese. **§36).** x = suprafaţa => $\frac{3}{5}x+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}x+456=x \Rightarrow x=1710$ ha. **§37).** a). x = numărul $\Rightarrow \frac{3}{10}x=20+\frac{1}{5}x \Rightarrow x = 200$. **§38).** 20 l. **§39).** 70 ani; 40 ani.

Capitolul III : Rapoarte şi proporţii

Raport : ** §1) a) 0,6; b) 2,5; c) 7,5; d) 0,5; e) 0,2; f) 0,05; g) 2,25; h) 0,25; i) 0,(148); j) 2,(7); k) 0,5625; l) 0,(54). §2) a) 15; b) 2; c) 4. §3) a) 4; b) 792; c) 40. **§4)** P = 42 cm, A = 90 cm^2. **§5)** a) 14/10; b) 10/14; c) 48/14; d) 2. **§6)** a) 3; b) L/l = 4/3; c) 16; d) 2/7. §7) 14,25. §8) a) 1/5; b) 4 si 1/4; c) 1/3 si 3. §9) a) 8/3; b) 4; c) 1/2. **§10)** 3/5 si 9/25. **§11)** 1/ 2. §12) 4/7 si 7/4. §13) 10/9. §14) 3/10. §15) 12/7. §16) 12/5.

Proporţie : * §1) a) Da; b) Da; c) Nu; d) Da; e) Nu; f) Nu; g) Da; h) Da; i) Da. **§2)** a) Nu; b) Da; c) Nu; d) Da; e) Da; f) Da. ** §3) ex: 1/2 = 4/8; 3/4 = 9/12; 6/3 = 0,12/0,06; 3/4 = 0,25/0,(3) §4) ex: a) 2/3 = 4/6; b) 3/6 = 4/8; c) 4/12 = 5/15; d) 24/6 = 8/2; e) 6/2 = 15/5; f) 4/8 = 6/12; g) 3/16 = 9/48; h) 12/4 = 36/12; i) 0,12/0,6 = 8/40; j) 0,7/0,3 = (1/9)/(1/21). §5) a) 5/2; b) 2; c) 2; d) 100 si 10. §6) 6. §7) 180. §8) 9/10. §9) 2/3. §10) 3/4.

Aflarea unui termen necunoscut al unei proporţii : * §1) a) 12; b) 15; c) 0,5; d) 3; e) 15; f) 5/4; g) 8; h) 9/2; i) 2/33. ** §2) a) 36; b) 5; c) 7/8; d) 16; e) 13; f) 3/8; g) 3/40; h) 1/10. §3) a) 10/9; b) 13/8; c) 3; d) 161; e) 2; f) 2; g) 2; h) 7/36; i) 4; j) 1. §4) a) 3; b) 2; c) 9/2; d) 1/5; e) 1/24. *** §5) a) 27; b) 15; c) 26; d) 11/10; e) 5. **§6)** a) 5/7; b) 10; c) 135; d) 2.

Proporţii derivate : * §1) a) 2/14 = 5/35; 35/5 = 14/2; 5/2 = 35/14; b) ex: (20 + 48) / 48 = (60 + 144) / 144, etc. ** §2) a) 4/19; b) 22/10; c). 2/10; d) 55/61; e) 10/11; f) 2/4. **§3)** a) 3/2; b) 2/1; c) 2/3; d) 6/8; e) 1/2. **§4)** a) 5; b) 7; c) 5; d) 2. §5) 28 si 36. §6) 12 si 30 §7) 42 si 18. §8) 54 cm^2. §9) a) 6/15; b) 90 cm^2. **§10)** 24 si 39; 39/ 6. **§11)** a) 6/5; b) 130 si 156. §12) 8 si 12. §13) a) 3; b) 3; c) 3. §14) 15. §15) 4/11 si 6/11.

Procente : * §1) a) 105/2; b) 507/20; c) 9; d) 420; e) 201. §2) 252 kg. §3) 1 exerciţiu a rezolvat şi 19 exerciţii mai are de rezolvat. ** §4) a)6; b) 3/5; c) 88. §5) 95%; 285 kg. §6) 3,5 kg. §7) 2,43 km. §8) 1850000 lei şi 9384500 lei. §9) 189 cm^2. §10) 5060 lei. §11) 17250 lei. §12) 29 piese. §13) 9 exerciţii. §14) 49500 lei. §15) a) 1% < 1,2%; b) 8% > 7,5%; c) 25% a > 80% b; d) 15%a > 12%a; e) 64%a > 63%a.

Aflarea unui număr când se cunoaşte p% din el : * §1) a) 90; b) 30; c) 3000. §2) 175000 lei. §3) 36 adică 72%. §4) 24 elevi. §5) 32 elevi. ** §6) 35. §7) 34. §8) 10. §9) 4000000 lei. §10) 6000000 lei. §11) 35000 lei. §12) 425000 lei. §13) 15 ex. §14) 80 km, 20 km. §15) a) 600 kg, 1100 kg, 300 kg; b) 600 kg; c) 700/3 kg. §16) 30 elevi. §17) 45. §18) A = 600cm^2. *** §19) 50000000 lei. §20) 37500000 lei.

Aflarea raportului procentual : * §1) a) 40%; b) 125%. §2) 80% si 20%. ** §3) 20%. §4) 36%. §5) 30%, 50% si 20%. §6) 5%. §7) 37,5%. §8) a) 80%; b) 500/9%.

Probabilităţi : * §1) a) 1/6; b) 3/6; c) 3/6; d) 3/6; e) 4/6; f) 2/6; g). 2/6. §2) a) 8/30; b) 6/30; c) 10/30. ** §3) 6/21; b) 6/21; c) 6/21; d) 6/21; e) 14/21. §4) a) 1) 2/10; 2) 1/10; 3) 3/10; 4) 4/10; b) 1) 10/45; 2) 9/45; c) 1) 20/ 55; 2) 10/55; 3) 34/55. §5) 114 şi 314. §6) a) 1/10; b) 7/10; c) 2/10; d) 6/10; e) 4/10. §7) a) 12/30; b) $\frac{12}{30}\cdot\frac{11}{29}=\frac{132}{870}$

Proporţionalitate directă : * §1) a) Da; b) Nu; c) Da; d) Da; e) Da. ** §2) a) 9 şi 6; b) 12 şi 24; c) 20, 15 şi 8; d) 2/5 şi 3/7; e) 1/4 şi 1; f) 36 şi 27; g) 6 şi 5; i) 3,25 şi 4. §3) 36. §4) 2/18 = 1/9. §5). 4,5. §6) 4732 cm^2. §7) 20,46 şi 29. §8) 2 şi 5; 4 şi 10; 6 şi 15. §9) 20 şi 25. §10) 6,9 şi 15. §11) 80. *** §12) 28,16 şi 72. §13) 8 şi 12. §14) 15 şi 18.

Proporţionalitate inversă: * §1) a) Da; b) Da; c) Da; d) Nu; e) Da. ** §2) a) 14; b) 6 si 12; c) 7 si 7/2; d) 3/2; 2,5; 3; e) 8/9; 7/9; 3/5; f) 42 şi 70; g) 3, 5, 4; h) 8/5; 6/5; 12/5; i) 3 şi 11. §3) a) 3/4 şi 1/2; b) 4 şi 30; c) 48, 162 şi 104; d) 3, 14, 12. §4) 6, 4, 3. §5) 300 cm^2. *** §6) 24 şi 18; §7) 25 şi 20.

Regula de trei simplă : ** §1) 9,375 kg. §2) 10 ore, 5 muncitori. §3) 21 piese. §4) 255 ouă. §5) 10 zile. §6) 325000 lei. §7) 8 şoricei, 6 zile. §8) 9 iepuri. §9) 6 ore şi 40 minute. §10) 80 km; 12 litri. §11) 7,5 kg şi 5 kg. §12) 14,4 kg şi 0,4 kg. §13) 80 km/h. §14) 333,3 km. §15) 4 ore şi 72 km/h. §16) 0,6 kg şi 42 kg. §17) 3. §18) 20 kg şi 9 kg. §19) 20 pomi.

Împărţirea unui număr în părţi direct sau invers proporţionale cu mai multe numere date :

* §1) 26, 52 , 91. §2) 3,2; 4,8; 5,6. §3) 20/3, 25/6, 5, 15/4. §4) 90, 60, 36. §5) 6, 24, 8. §6) 12, 60, 6. §7) 150, 225, 250. §8) 15, 10, 25, 20. ** §9) a) 21, 28, 35; b) 6, 8, 10; c) 3, 4, 5; d) 6, 8, 10; e) 4, 16/3, 20/3. §10) a) 60, 80 120; b) 35/2, 70/3, 35; c) 15, 20, 30; d) 9, 12, 18. §11) 20, 30, 40. §12) 24, 40, 56. §13) 1680 cm^2. §14) 5, 6, 7. §15) 15, 18, 27, 30. §16) 12, 24, 30, 36. §17) 320000lei; 48000 lei; 72000 lei. §18) 12, 20, 16, 12, 24, 28. §19) 8, 9, 10. §20) 15 ore şi 21 ore; 225000 lei, 375000 lei, 525000 lei. §21) 60000 lei, 50000 lei. §22) 76 m, 2400000 lei, 3600000 lei, 1600000 lei.

Exerciţii recapitulative : **§1)** 3. **§2)** 2/5. **§3)** a) 9; b) 0,8; c) 2; d) 5; e) $2^{15} + 3$; f) 6/5; g) 5/2; h) 4/5; i) 0,09. **§4)** a) 165; b) 2; c) 64. **§5)** a) 0; b) 2. **§6)** 12 şi 32. **§7)** 90 şi 126. **§8)** 15 şi 20. **§9)** 11/8. **§10)** 3; 6; 3. **§11)** a) 18; 24; 10; b) 162; 216; 90; c) 30; 40; 50/3; d) 9; 12; 5. **§12)** a) 4 şi 27; b) 5 şi 10/3; c) 3 şi 4/21. **§13)** 3800 g apă. **§14)** 4%. **§15)** 200 g apă. **§16)** a) 2%; b) 4500 g apă. **§17)** a) 8 g sare; b) 10 g sare. **§18)** a) 10 g sare; b) 37,5%. **§19)** a) 72 g apă; b) 10 g sare; c) 180/13%. **§20)** 16 băieţi şi 12 fete. **§21)** 20 băieţi şi 15 fete. **§22)** 21 băieţi şi 9 fete. **§23)** 200 km. **§24)** a) 9 şi 15; b) 18 şi 30; c) 30 şi 50; d) 24 şi 40; e) 18 şi 30. **§25)** 30 km. **§26)** 21 km. **§27)** 74 şi 111. **§28)** 50; 200 şi 30. **§29)** 14; 100 şi 200. **§30)** 12, 30, 20. **§31)** 60, 80, 320. **§32)** 60%. **§33)** a) 62,5%; b) 80%. **§34)** 410 piese. **§35)** a) 40%; b) 24; c) 12 elevi. **§36)** 20 şi 16. **§37)** a) 32 elevi; b) 6,25%, 12,5%, 6,25%; c) 25%; d) 6 elevi. **§38)** 115%. **§39)** 56,25%. **§40)** 20%.

Capitolul IV : Numere întregi

§1). −5 −3 −1 0 1 4 6 (axa numerelor) §2) a) 4; 0; 5; b) 4; 6/3. §3) a) −5 ∈ Z şi −5 ∉ N; b) 3 ∈ Z şi 3 ∈ N; c) 0,8 ∉ Z şi 0,8 ∉ N. §4) B = {0, 2, 3}, C = {−5, −4, 0, 2, 3}, D = {−5, −4}.

Valoarea absolută a unui număr întreg (modulul) : ✱✱ §6) a) 3 = 3; b) 0 < 3; c) 3 < 4; d) 9 > 0; e) 9 = 9; f) 6 > 4; g) 8 < 9; h) 5 > 4; i) 10 = 10. §7) a) x = 0; b) x = 5 şi x = −5; c) x = 17 şi x = −17; d) x ∈ ø; x = 3; x = −3; f) x ∈ ø; g) x = 4 şi x = −4; h) x = 10şi x = −10; i) x = 0; j) x = 9 şi x = −9; k) x = 5 şi x = −5; l) x = 5 şi x = −5; m) x = 4 şi x = −4; n) x = 6 şi x = −6; o) x = 4 şi x = −4.

Adunarea şi scăderea numerelor întregi : ✱ §1) a) −21; b) −12; c) 8; d) −24; e) 13; f) 17; g) 26; h) −34; i) −28; j) −95; k) −191; l) −50; m) −1; n) −43; o) −21; p) −36; r) 1. §2) a) −9; b) −2; c) −15; d) −8); e) −23; f) −2; g) −26; h) −31; i) −11; j) −8; K) −7; l) −4; m) −39; n) −26; o) −15; p) −29; r) −6; s) 13; t) 9; v) −37. ✱✱ §3) a) −2; b) 3; c) 99; d) −14; e) 8; f) 6; g) −6; h) 1; i) −11; j) −2; k) 1; l) −1; m) −8; n) 13. §5) a) −3; b) 5; c) −14; d) −9; e) −5; f) −22; g) 2; h) −16.

Relaţiile de <, ≤, ≥, > între numere întregi : ✱✱ §1) a − 2 < 5; b) −3 < 7; c) −5 > −6; d) 2 > −4; e) 12 < 26; f) −8 < −6; g) 5 > 1; h) −3 < 3; i) 4 = 4; j) −1 = −1; k) 4 < 7; l) −8 > −34; m) 1 > −1; n) 2 < 8; o) 2 > 1. §2) a) −10, −8, −5, −3, −1, 2, 6, 14; b) −2, −1, 0, 4. §3) a) 12, 4, 0, −1, −6, −8, −13, −25; b) 8, 2, −4, −5. §4) A = −17; B = −12; C = −7. §5) a) −999; b) −1000; c) −99999; d) −10. §6) 1, 0, −1, −2, −3. §7) −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2. §8) −2, −1, 0, 1, 2. §9) a) 5 > 2; b) 6 > 3. §10) 1098. §11) −109 < −108. §12) −120. §13) −316. ✱✱✱ §14) a) x ∈ {−3; −2; −1; 0; 1; 2; 3}; b) x ∈ {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7}; c) x = 0; d) x ∈ ø e) x ∈ N; f) x ∈ ø; g) x ∈ {2; 3}; h) x ∈ {−3; −2; 2; 3}. §15) A = {−2, −1, 0, 1, 2}, B = {−3, −2, −1, 0, 1, 2, 3}, A − B = = ø, A ∩ N = {0, 1, 2}; B − N* = {−3, −2, −1, 0}; A ∩ B = A; B − A = {−3; 3}. §16) A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}; B = {−5, −4, −3, −2, −1, 0}; C = {−2, −1, 0}; A ∩ B = {0}; A − C = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}; B − A = {−5, −4, −3, −2, −1}; B − N* = B; C − N = {−2; −1}; A ∩ N = A.

Înmulţirea numerelor întregi : ✱ §1) a) 12; b) −12; c) −16; d) 18; e) −110; f) 63; g) −32; h) 56; i) −30; j) −48; k) 54; l) −28; m) −72; n) 0; o) 4. §2) a) 12; b) 0; c) −144; d) −60; e) −24; f) −8; g) −5; h) 12; i) −88; j) 12. §3) a) −23; b) 0; c) −5; d) −25; e) 18; f) 10; g) −9; h) 10. ✱✱ §4) a) 5; b) 12; c) −6; d) −11; e) −22; f) −50; g) 5; h) 2. §6) a) −15; b) −6 şi 6; c) −22.

Împărţirea numerelor întregi : ✱ §1) a) −4; b) −5; c) 4; d) −3; e) −4; f) 3; g) −5; h) −5; i) −4; j) 3; k) 28; l) 3; m) 9; n) −7; o) −3. ✱✱ §3). a).−2; b).−2; c).−3; d).−3; e).−9; f).−2; g). 2; h).−20; i). 0; j).−1; k). 2; l).−2. §4). a). 3; b). 1; c). 2; d).−8; e).−13; f).−4; g).−2; h).−1; i).−1; j).−5; k).−4; l). 8; m). 6; n). 1.

Divizorii unui număr întreg : ✱ §1). $D_{-12} = \{\pm1;\pm2;\pm3;\pm4;\pm6;\pm12\}$; $D_{18} = \{\pm1;\pm2;\pm3;\pm6;\pm9;\pm18\}$; $D_{-20} = \{\pm1;\pm2;\pm4;\pm5;\pm10;\pm20\}$. ✱✱ §2). a). $\{\pm1;\pm7\}$; b). $\{\pm8\}$; c). $\{\pm1;\pm5\}$; d). $\{\pm8;\pm16\}$; e). $\{\pm1;\pm2\}$; f). $\{\pm1;\pm2;\pm4;\pm8;\pm12\}$. §3). a). $\{\pm1;\pm2;\pm3;\pm6\}$; b). $\{\pm1;\pm2;\pm4;\pm8\}$; c). $\{-2;-4;2;-8\}$; d). $\{0;-1;1;-2\}$. §4). a). {1; 3}; b). ∅; c). {0; 1; 3}; d). {2}. §5). a). {0; 6}; b). {−1; −2; −3; −6}. ✱✱✱ §6). a). {−2; 0; 2; 4}; b). {−9; −3; −1; 5}; c). {−4; 0; 2; 6}; d). {−1; −2}. §7). a). i). {−3; 3}; ii). {0; 3; 6; 9; 12; 15; 18}; b). i). {−21; 21}; ii). {0}. §8). se dă factor comun. §9). se pune condiţia ca $\overline{3ab}\,\vdots\,25$ şi $\overline{3ab}\,\vdots\,3$. §10). se pune condiţia ca $\overline{4ab}\,\vdots\,9$ şi $\overline{4ab}\,\vdots\,4$.

Puterea cu exponent număr natural a unui număr întreg : ✱ §1) −8, 81, 81, −1, 1, 1, −1, −27, 1, 21,1,1,169,−7.

Ordinea efectuării operaţiilor şi folosirea parantezelor : ✱✱ §5) A = {−12, −6, −4, −3, −2, −1, 1, 2, 3, 4, 6, 12}, B = {0, 1, 2, 3, 4}, C = {−3, −2, −1, 0, 1, 2, 3}, D = {5, 10, 20}, E = {3, −3}, F = {1, 2, 3, 6}, G = {0, 1, 2, 3}, H = {−6, −3, −2, −1}, I = {−4, −3, −2, 2, 3, 4}, a) B − A = {0}; b) A ∩ B ∩ F = {1, 2, 3}; c) (C ∩ I) − E = {−2, 2}; d) (G − A) ∪ C = = C; e) (I − N) ∩ H = {−3, −2}; f) (C ∩ N) −F = {0}. ✱✱✱ §6) a) 0; b) 1. §7) a) $(-2)^{2n} \cdot 25^n = 2^{2n} \cdot 5^{2n} = 10^{2n} = (-10)^{2n}$; b) $(-2)^n + (-2)^{n+1} - (-2)^{n+2} = (-2)^n \cdot [1 + (-2) - (-2)^2] = (-2)^n \cdot (-5)$; d) $\frac{(-2)^n \cdot [1-(-2)]}{3} = (-2)^n \cdot \frac{3}{3} = (-2)^n \in Z$. §8) a) x = −6; b) x = 2 şi y = 5 sau x = −2 şi y = 9 sau x = −8 şi y = 3 sau x = −4 şi y = −1; c) x = 2 sau x = −3; d) x = 2 sau x = −4; e) x = 5 sau x = −2; f) x = −1 sau x = −2; g) x = 1 şi y = 2 sau x = 2 şi y = 1 sau x = −1 şi y = −2 sau x = −2 şi y = −1; h) x = 2 şi y = −1 sau x = −2 şi y = 3 sau x = −4 şi y = 1 sau x = 0 şi y = −3; i) x = −1. §9) a) $(-2)^4 = 2^4 < 3^4$; b) $(-2)^3 = -2^3 > -3^3 = (-3)^3$; c) $(-2)^{51} > (-3)^{51}$; d) $(-2)^{240} < (-3)^{240}$; e) $(-2)^{33} = -2^{33} < 3^{22} = (-3)^{22}$; f) $(-2)^{27} = (-8)^9$; g) $(-2)^{10} = 2^{10} > -4^5 = (-4)^5$; h) $(-3)^{18} = 3^{18} = (-27)^6 = 27^6 = (3^3)^6$.

Ecuații de forma x + a = b, a, b ∈ Z : ✱ §1) –39; b) –26; c) –13; d) –6; e) –34; f) 9; g) 5; h) –2; i) 7; j) 12; k) 8; l) 1; m) –9; n) –18; o) –3; p) –7. §2) –5. §3) –6. §4) x ∈ ø. ✱✱ §6) a) 9; b) 20; c) 2; d) 18; e) 3; f) –3. §7) a) 17; b) 10; c) –2; d) –3; e) 0; f) –78; g) –4; h) –10. §8) a) x = 4 și x = –6; b) x = 4 și x = –8; c) x = –3 ; d) x = 6; e) x = 14 și x = –2; f) x = 23 și x = –13; g) x ∈ ø; h) x = 5 și x = 3; i) x ∈ ø; j) x = –1 și x = –5; k) x = 4 și x = –4; l) x = 7 și x = 3 și x = –7 și x = –3.

GEOMETRIE

Capitolul V : Dreapta

✱ §1) AB ∩ CD = {C}. §2) a) A ∈ a și A ∈ c, E ∈ c, D ∈ c și D ∈ b; B ∈ a și B ∈ b, C ∈ a; b) A, B, C ∈ a; B, D ∈ b; A, E, D ∈ c; c) A, E, D si A, B, C ; d) A, E, D, B sau A, E, D, C sau A, B, C, E sau A, B, C, D; e) B, C, D, E ✱✱ §3) a) Da; b) Nu; c) Nu; d) Nu; e) Nu; f) Da; g) Da. §4) a) Da; b) Nu; c) Nu; d) Da; e) Nu; f) Da. §5) coliniare. §6) 4 drepte. §7) 3 drepte. §8) a) Da; b) Da; c) Nu; d) Da; e) Nu. §10) i) coincid; ii) BE∩ AD ={B}, BE ∩ DE = {E}.

Semidrepte și segmente : ✱ §1) a) Da; b) Nu; c) Da; d) Da; e) Nu; f) Da; g) Da; h) Da; i) Nu; j) Nu; k) Nu. §2) a) Nu; b) Nu; c) Da; d) Nu; e) Da; f) Da; g) Da; h) Da; i) Nu; j) Da; k) Nu. ✱✱ §3) a) Da; b) Nu; c) Nu; d) Da; e) Nu; f) Da; g) Da; h) Nu; i) Da; j) Nu; k) Da. §4) a) Nu; b) Da; c) Da; d) Nu; e) Nu; f) Da; coliniare. §5) a) Da; b) Nu; c) Da; d) Nu; e) Nu; f) Da. §6) D, A, B, C sau C, A, B, D sau D, B, A, C sau C, B, A, D. §7) C, A, B, D sau C, D, B, A. §8) A, B, C. §9) C, B, A sau A, B, C. §10) C, A, B sau C, B, A. §11) B, A, C sau C, A, B. §12) A, B, C, D. §13) A, B, D, C sau A, D, B, C sau A, D, C, B. §14) B, D, C, A sau D, B, C, A. §15) A, C, B, D sau A, D, C, B. §16) A, B, C, D sau A, D, C, B.

Lungimea unui segment. Operații cu segmente. Mijlocul unui segment : ✱ §1) AC = 8 cm. §2) BC = 1,9 cm. §3) MB = 3,25 cm. ✱✱ §9) RT = 3 cm dacă R ∈ [ST] și RT = 7 cm dacă S ∈ [RT]. §10) BC = 5 cm, CD = 3 cm, BD = 8 cm. §11) GH = 2 cm, FG = 3 cm, EF = 7 cm. §12) PR = 5 cm, RB = 3 cm, BE = 4 cm, RE = 7 cm, AB = 10 cm, AE = 14 cm. §13) DE = 9 cm, FE = 4 cm, AC = 4 cm, CB = 5 cm, (AC) ≡ (BD) ≡ (FE), (CB) ≡ (DF). §14) BC = AF : 3 = 5 cm, CE = 2 cm, ED = 3 cm, DF = 3 cm, D este mijloc. §15) AB = 4 cm, CE = 5 cm, B si E sunt mijloace. §16) a) Nu; MN = MP – NP; b) Da; c) Nu; d) Nu; e) Da; f) Da; g) Nu; h) Da; i) Da. §17) AB = 6 cm, BC = 7 cm, AC = 13 cm. §18) ST = 8 cm, RM = 2 cm, NT = 4 cm, MN = 6 cm. §19) AB = 10 cm, BC = 6 cm, AC = 16 cm, MP = 3 cm, PN = 5 cm. §20) MN = 7 cm. §21) CD = AD – BC = 4 cm, BC = CD. §22) EF = 2 cm, BF = 4 cm, AC = 3 cm, AB = 6 cm, BE = 6 cm. §23) a) AD = 5 cm, DC = 5 cm, AC = 10 cm; b) D este mijloc; c) BM = 1 cm, AM = 4 cm, CN = 2,5 cm, BN = 4,5 cm, MN = 3,5 cm, AN = 7,5 cm. §24) a) AB = 4 cm, MC = 6 cm, MD = 10 cm, AD = 12 cm; b) 5 cm. §25) b) 8 cm. §26) AD = 18 cm. §27) a) MC = 9 cm, AC = 12 cm; b) 4,5 cm.

Capitolul VI : Unghiul

✱✱ §1) a) Da; b) Da; c) Nu; d) Da; e) Nu; f) Da; g) Da; h) Da; i) Da; j) Da; k) Da; l) Nu. §2) ∢EAC ≡ ∢BAC ≡ ∢BAF ≡ ∢EAF; ∢CAG ≡ ∢FAG ≡ ∢CAD ≡ ∢FAD a) int(∢BAC); b) int(∢EAC) ∪ (AF; c) int(∢FAD); d) ø. §3) m(∢CAD) = 7°45'; m(∢BAD) = 26°15'; m(∢BAE) = 54°. §4) m(∢COD) = 55° ;m(∢AOD) = 145° §5) a) 15°30'; b) 48°15'; c) 3°17'; d) 8°9'; e) 65°32'; f) 44°50'; g) 48°16'22"; h) 63°35'17"; i) 31°21'51"; j) 4°18'58". §6) a) 3639' b) 61°54'; c) 50°25'26"; d) 4°40'; e) 48°15'28"; f) 62°30'; g) 4°38'15"; h) 7°54'39"; i) 4°55'38"; j) 26°18'. §7) a) 4°20'24"; b) 28°58'48"; c) 1°44'5"; d) 22°5'; e) 32°49'20"; f) 145°30'43". §8) ii) ∢POR ≡ ∢KOP; ∢LOM ≡ ∢DOE; ∢SOP ≡ ∢TOS. §9) ∢BAC ≡ ∢MON ≡ ∢GEF; ∢CAD ≡ ∢KEG ≡ ∢NOP; ∢BAD ≡ ∢MOP ≡ ∢FEK; m(∢BAD) = 75°. §10) m(∢COD) = 40°, m(∢BOD) = 100° .

Unghiuri adiacente, complementare, suplementare : ✱ §1) m(∢BAD) = 72° . §2) m(∢CAD) = 32° . §3) m(∢ABD) = 111°. ✱✱ §5) m(∢DBC) = 15° sau m(∢DBC) = 75°. §6) a) 58° și 148°; b) 39° și 129°; c) 3° și 93°; d) 74°15' și 164°15'; e) 72°22' și 162°22'; f) 6°1' și 96°1'; g) 41°44'45' și 131°44'45"; h) 16°10'58" și 106°10'58"; i) 82°51'47" și 172°51'47"; j) 55°59'35" și 145°59'45"; k) 89°59'2" și 179°59'2"; l) 89°37'4" și 179°37'4". §7) a) Da; b) Da; c) Nu; d) Nu. §8) a) Nu; b) Da; c) Nu; d) Da. §9) a) suplementare; b) suplementare; c) Nu; d) complementare. §10) a) Da; b) Nu; c) Nu; d) Da. §13) 36°. §14) m(∢ABD) = 134°.

Bisectoarea unui unghi. Unghi drept, ascuțit, obtuz. Unghiuri opuse la vârf : ✱✱ §2) m(∢ABD) = 65°. §3) m(∢ABD) = 140°, m(∢EBD) = 95°. §4) m(∢DBC) = 22°, m(∢DBE) = 11°, m(∢ABE) = 105°. §5) m(∢DBC) = 24°, m(∢ABD) = 78°. §6) m(∢AOE) = 120°, m(∢EOD) = 60°; 150°. §7) 65°. §8) 77°. §9) m(∢COD) = 27°, m(∢AOD) = 153°, m(∢BOC) = 153°. §10) a) [180° – (45° + 37°)] : 2 = 49°; b) 41°; c) m(∢DOC) = 35°; m(∢COE) = 55°; m(∢EOB) = 55°; m(∢COD) = 30°; m(∢EOF) = 15°30'; m(∢FOB) – 15°30'; e) m(∢COD) = 23°; m(∢EOF) = 42°; m(∢DOE) = = 50°; f) m(∢COD) = 19°; m(∢DOE) = 31°; m(∢FOG) = 40°; m(∢GOB) = 40°; g) m(∢COD) = 43°; m(DOE) = 47°; m(∢EOB) = 47°; h) m(∢COA) = 36°; m(∢DOE) = 36°; m(∢EOF) = 36°; m(∢FOB) = 36°. §11) a) m(∢COB) = 90° : 3 = 30°; m(AOC) = 60°; b) m(∢DOB) = 15°; m(∢COD) = 30°; m(∢COA) = 45°; c) m(∢COD) = 8°; m(∢EOB) = 23°; m(∢COE) = 51°; d) m(∢DOB) = 19°; m(∢COD) = 29°; m(∢COA) = 42°; e) m(∢DOA) = 35°; m(∢DOC) = 35°; f) m(∢EOD) = 34°; m(∢DOC) = 12°; m(∢DOE) = 39°; m(∢DOC) = 6°; m(∢COA) = 6°; h) m(∢DOC) = 22°; m(∢EOF) = 15°; m(∢FOG) = 8°; m(∢GOB) = 8°. §12) a) m(∢COB) = 180° : 4 = 45°; m(∢COA) = 135°; b) m(∢COA) = (180° – 100°) :2 = 40°; m(∢COB) = 140°; c) m(∢DOB) = 26°; m(∢DOC) = 52°; d) m(∢COA) = 40°; m(∢COB) = 140°; e) m(∢EOB) = 18°; m(∢COA) = 36°; m(∢COD) = 54°; f) m(∢COB) = 16°; m(∢COD) = 32°;

m(∢EOD) = 72°. §13) a) 35° + 90° + 55° = 180° ⇒ Da; b) Nu; c) Da; d) Da; §14) a) m(∢COB) = 120°; b) m(∢COD) = (180° – 80°) : 2 = 50°; m(∢COB) = 130°; c) m(∢COD) = 36°; m(∢BOC) = 144°; d) m(∢COD) = 40°; m(∢BOC) = 140°; e) m(∢EOD) = 23°; m(∢BOA) = m(∢COD); m(∢BOA) = 46°; m(∢BOC) = 134°; m(∢AOD) = 134°; f) m(∢AOB) = 60°; m(∢BOC) = 120°; g) m(∢BOC) = 125°; m(∢COD) = 55°; m(∢BOA) = 55°; m(∢AOD) = 125°; h) m(∢AOF) = 28°; m(∢AOE) = 34°; m(∢AOD) = 124°; m(∢DOC) = 56°; m(∢BOC) = 124°. *** §16) a) Da; b) Da.

Unghiuri formate în jurul unui punct : * §1) 72°. ** §4) a) m(∢AOD) = 360° – (56° + 37° + 127°) = 150°; b) m(∢BOC) = 55°; m(∢AOD) = 110°; m(∢COD) = 175°; c) m(∢AOB) = 40°; m(∢BOC) = 70°; m(∢COD) = 80°; m(∢DOE) = 25°. §5) a) m(∢COB) = (180° – 90°) : : 3 = 30°; m(∢DOA) = 60°; m(∢DOE) = 45°; m(∢EOC) = 45°; m(∢AOF) = 75°; m(∢FOB) = 105°; b) m(∢DOH) = 15°; m(∢HOB) = 15°; m(∢BOF) = 30°; m(∢AOE) = 30°; m(∢EOC) = 30°; m(∢COD) = 90°; m(∢AOF) = 150°; c) m(∢COE) = 18°; m(∢AOE) = 18°; m(∢DOB) = 54°; m(∢BOF) = 18°; m(∢AOF) = 162°; d) m(∢BOD) = 180° – 65° · 2 = 50°; m(∢DOG) = 45°; m(∢GOC) = 45°; m(∢COE) = 20°; m(∢EOA) = 20°; m(∢BOF) = m(∢EOA); m(∢FOA) = 160°; e) m(∢EOA) = 45°; m(∢COE) = 45°; m(∢GOC) = 30°; m(∢DOG) = 30°; m(∢BOD) = 30°; m(∢BOF) = m(∢EOA); m(∢FOA) = 135°. §6) m(∢EOC) = 25°; m(∢AOB) = 130°; cum m(∢AOD) = m(∢BOC) ⇒ D, O, B coliniare; m(∢DOC) = 130°. §7) a) m(∢HOF) = 45°; m(∢FOB) = 45°; m(∢BOD) = 180° – (28° + 90°) = 62°; ∢COA ≡ ∢BOD; ∢AOE ≡ ∢FOB; m(∢EOD) = 73°; b) m(∢MOB) = 22°; m(∢DOB) = 44°; ∢AOC ≡ ∢ DOB ⇒ m(∢AOG) = 19°; m(∢COL) = 90° – 25° = 65°; m(∢BOL) = 71°; m(∢AOD) = 136°; c) x = 90° : 3 = 30° ⇒ m(∢BOF) = 30°; (∢COA)= 60°; m(∢AOD) = 120°; d) x = 180° : 4= 45° ⇒ m(∢DOF) = 22°30'; m(∢FOA) = m(∢DOF); m(∢AOM) = 67°30'; m(∢MOC) = m(∢AOM); e) m(∢GOF) = 18°; m(∢BOF) = m(∢EOA); m(∢AOD) = 54°; ∢BOC ≡ ∢AOD; m(EOC) = 108°; g) ∢COE ≡ ∢FOD; m(∢COA) = 180° – (90° +18° +15°) = 58°; ∢DOB ≡ ∢AOC; m(∢EOB) = 107°; h) ∢FOA ≡ ∢DOF ≡ ∢ COE ≡ ∢BOE; ∢DOB ≡ ∢AOC; m(∢FOA) = (180° – 40°) : 2 = 70°. §8) x = (360° – 35° · 2 – 85° · 2) : 4 = 30°; m(∢DOC) = 90° ; §9) a) m(∢BAE) = 150°; b) m(∢BAD) = 80°; c) 115°; d) m(∢FAC) + m(∢CAD) + m(∢DAE) = 30° + 20° + 130° = 180° ⇒ F, A, E coliniare. *** §10) m(∢GOM) = 112°; m(∢MOS) = 96°; m(∢GOS) = 152°. §11) m(∢AOF) = 140°; m(∢AOD) = 40°; m(∢AOB) = 60°; m(∢AOC) = 120° ⇒ m(∢BOC) = 60°; m(∢EOC) = 180° – (40° + 20° + 60°) = 60° ⇒ ∢EOC ≡ ∢BOC ⇒ (OC bisectoare.

Capitolul VII : Congruența triunghiurilor

Construcția triunghiurilor : ** §1) 13,5 si 13,5 sau 15 si 12. §2) BC = 15 cm, AB = 30 cm, AC = 19 cm. §3) 16; 20 și 32. §4) AB = 13 cm, AC = 10,4 cm, BC = 15,6 cm. §5) 30; 40 si 24. §6) AC = 45 cm, AB = 72 cm, BC = 30 cm. §8) triunghi isoscel. §12) obtuzunghic. §13) dreptunghic. §14) obtuzunghic isoscel. §15) echilateral.

Cazurile de congruență a triunghiurilor : * §1) a) ΔAOC ≡ ΔBOD, cazul U.L.U. pentru că : ∢A ≡ ∢B (au masura de 70°), (OB) ≡ (OA) (au fiecare 5 cm) si ∢AOC ≡ ∢BOD (sunt unghiuri opuse la vârf), b) și c) rezultă din ΔAOC ≡ ΔBOD; d) L.U.L. .§2) (AO) ≡ (OC) (au 6 cm), ∢A ≡ ∢C (au 90°), ∢AOD ≡ ∢COB (unghiuri opuse la vârf) ⇒ U.L.U. §3) L.U.L., (CA) ≡ (CB) (din ipoteza), ∢ACO ≡ ∢BCO (CO bisectoare), CO latură comună ⇒ ∢COB ≡ ∢COA dar m(∢COA) + m(∢COB) = 180°, m(∢COA) = 90°.§4) L.L.L. ** §5) L.L.L. pentru că (AB) ≡ (AC) ≡ (AD) ≡ (BD) ≡ (AE) ≡ (CE). §6) ΔACD ≡ ΔBCD isoscele pentru că (AC) ≡ (AD) ≡ (AB) ≡ (BD) ≡ (BC) și congruente (L.L.L.) pentru că (AC) ≡ (BC), (AD) ≡ (BD), CD latură comună.§7) L.L.L.: (OA) ≡ (OB) (raze), OM latură comună, (AM) ≡ (BM) (din ipoteză). §8) prima figură : a). ΔOBC ≡ ΔOAD, L.U.L : (OC) ≡ (OA) (raze în cercul mic), ∢O unghi comun, (OB) ≡ (OD) (raze în cercul mare); d) tr. isoscele. §9) a) și b) L.U.L. §10) a) AM = AB – BM; AN = AC – NC și cum (AB) ≡ (AC) (Δ isoscel) si (MB) ≡ (NC) (din ipoteză) ⇒ (AM) ≡ (AN); b) L.U.L. §11) a) ∢DAB = ∢DAM – ∢BAM și ∢EAC = ∢EAM – ∢CAM și cum ∢DAM ≡ ∢EAM (din ipoteză). ∢BAM ≡ ∢CAM (AM bisectoare) ⇒ ∢DAB ≡ ∢EAC; b) L.U.L. §12) a) L.U.L. §13) L.U.L. §14) L.U.L. §15) a) ΔABE ≡ ΔADC (L.U.L.) ⇒ [EB] ≡ [CD] și ∢AEB ≡ ∢ACD, ∢ADC ≡ ∢ABE, [BC] ≡ [ED] (diferențe de segmente congruente), ∢BED ≡ ∢DCB (suplemente de unghiuri congruente), ΔBOC ≡ ΔDOE (U.L.U.). §16) a) AM = AB/2 și AN = AC/2, cum (AB) ≡ (AC) ⇒ (AM) ≡ (AC) ⇒ L.U.L.; c) din demonstrația de la a) ⇒ ∢AND ≡ ∢AME cum m(∢DNC) + m(∢AND) = 180° și m(∢BME) + m(∢AME) = 180° ⇒ ∢DNC ≡ ∢BME ⇒ ΔDNC ≡ ΔDME, L.U.L. §17) a) L.U.L.; b) de la a); c) isoscel. §18) a) L.U.L.; c) L.L.L. §19) a) L.U.L. : (AM) ≡ (AN), AD latură comună și ∢MAD ≡ ∢NAD; b) și c) rezultă din a); d) ∢BMD și ∢CND sunt suplementele ∢AMD, ∢AND ⇒ ∢BMD ≡ ∢CND; e) L.U.L.. §20) a) L.U.L.; b) și c) din a); d) ΔACE ≡ ΔADE, L.U.L.; e) L.L.L.; f) din d) ⇒ ∢AEC ≡ ∢AED și cum m(∢AEC) + m(∢AED) = 180° ⇒ m(∢AEC) = 90°. §21) a) L.U.L.; b) și c) din a); d) MB = AB – AM, NC = AC – AN și cum (AM) ≡ (AN) și (AB) ≡ (AC) ⇒ (MB) ≡ (NC); e) ∢BMD și ∢CND suplemente de unghiuri congruente; f) L.U.L. §22) a) L.U.L.; b) și c) din a); d) (MB) ≡ (NC) ca diferențe de segmente congruente; e) suplemente de unghiuri congruente; f) L.U.L. §23) a) L.U.L.; b) din a); c) din a) ⇒ ∢CAB ≡ ∢DAB ⇒ ΔCAB ≡ ΔDAB, L.U.L.; d) cum (AC) ≡ (AD) ⇒ ΔACD isoscel; e) din c) ⇒ (CB) ≡ (DB) ⇒ ΔCBD isoscel. §24) a) L.U.L.; b) din a); c) $P_{\Delta ABC}$ = 19 cm; d) $P_{\Delta DBC}$ = CE + ED + CD = CE + DB + CD = CE + CB = AC – AE + CB = AC – AB + CB = 7cm – 4 cm + 8 cm = 11 cm. §25) ΔAMC ≡ ΔANB, L.U.L. ⇒ ∢ACM ≡ ∢ABN si ∢ANB ≡ ∢AMC ⇒ ∢BMC ≡ ∢CNB (suplemente de unghiuri congruente) și (MB) ≡ (NC) (diferențe de segmente congruente) ⇒ ΔMBP ≡ ΔNCP, U.L.U. ⇒ (BP) ≡ (PC).

Capitolul VIII : Perpendicularitate în plan

Drepte perpendiculare. Construcția triunghiurilor dreptunghice : * §1) a) Da; b) Nu; c) Da; d) Da; e)

Da; f) Da; g) Da. ** §2) fie ∢AOB şi ∢BOC unghiuri adiacente suplementare, (OE si (OF bisectoare, m(∢EOF) = m(∢AOB) : 2 + m(∢BOC) : 2 = [m(∢AOB) + m(∢BOC)] : 2 = 180° : 2 = 90°. §3) m(∢COB) = (180° − 62° − 6°) : 4 = 28°, m(∢COE) = 28° + 62° = 90° ⇒ CO⊥OE. §5) m(∢COE) = 110°; 145°. §6) m(∢AOB) + m(∢AOC) = 90° ⇒ m(∢AOC) = 60° ⇒ m(∢BOC) = 30°, m(∢AOC) + m(∢COD) = 180° ⇒ m(∢COD) = 120° ⇒ m(∢AOD) = 60° ⇒ m(∢DOB) = 60° + 30° = 90° ⇒ OD⊥OB. §7) (OC bisectoare ⇒ ∢COE ≡ ∢BOC ⇒ m(∢COE) = 45°, m(∢COB) = 45°, m(∢DOE) = 90°, ∢DOA ≡ ∢BOC, m(∢BOA)= 135°. §8) m(∢AOB) = m(∢BOC) = m(∢COD) = m(∢DOE)= m(∢EOF) = m(∢FOA) şi suma lor este 360° ⇒ m(∢AOB) = 69° ⇒ m(∢MON) = 30° + 60° + 60° + 30° = 180° ⇒ M, O, N coliniare; m(∢COF) = 60° + 60° + 60° = 180° ⇒ C, O,F coliniare; m(∢AOD) = 60° + 60° + 60° = 180° ⇒ A, O, D coliniare; m(∢MOC) = 30° + 60° = 90° ⇒ MO⊥OC, cum M, O, N coliniare şi F, O, C coliniare ⇒ MN⊥FC. §9) m(∢AOB) + m(AOC) = 180° ⇒ m(∢AOC) = 126° ⇒ m(∢BOC) =72° ⇒ m(∢EOB) = 36°; m(∢EOA) = 36° + 54° = 90° ⇒ EO⊥OA. §10) m(∢AOC) = 70° ⇒ m(∢COB) = 50° ⇒ m(∢DOB) = 40° + 50° = 90° ⇒ OD⊥OB; m(∢EOC) = 20° ⇒ m(∢EOA) = 20° + 50° + 20° = 90° ⇒ EO⊥OA. §11) m(∢AOB) + m(∢AOC) = 180° ⇒ m(∢AOC) = 135° ⇒ m(∢BOC) = 90° ⇒ OC⊥OB, m(∢AOB) + m(∢AOE) = 90° ⇒ OB⊥OE ⇒ m(∢COE) = 90° + 90° = 180° ⇒ C, O, E coliniare. §12) m(∢EOA) = 180° − 40° − 90° = 50° ⇒ m(∢EOF) = 25°; m(∢EOD) = 90° − 25° = 65°; m(∢FOD) = 25° + 65° = 90° ⇒ FO⊥OD. §13) m(∢AOM) = m(∢MOB) ⇒ m(∢MOB) = 40° ⇒ m(∢MOC) = 40° + 50° = 90° ⇒ MO⊥OC; m(∢DOC) = 360° − (80° + 50° + 90° + 30° + 40°) = 70° ⇒ ∢EON ≡ ∢NOD; m(∢NOD) = 20 ⇒ m(∢NOC) = 20° + 70° = 90° ⇒ NO⊥OC; m(∢MON) = m(∢MOC) + m(CON) = 90° + 90° = 180° ⇒ M, O, N coliniare.

Cazurile de congruenţă a triunghiurilor dreptunghice : ** §4) a) m(∢DAB) = 90° − m(∢BAC), m(∢EAC) = 90° − m(∢BAC) ⇒ ∢DAB ≡ ∢EAC △DAB ≡ △EAC, L.U.L. ((AD) ≡ (AE), (AB) ≡ (AC). §9) a) ipotenuză – unghi ascuţit; b) se arată că (DC) ≡ (AB) ⇒ △DMC ≡ △BMA, catetă – unghi ascuţit.

Bisectoarea şi mediatoarea : * §3) fie OC mediatoare, O ∈ (AB) ⇒ △OCA ≡ △OCB, L.U.L. ** §5) a) L.U.L.; b) din a); c) AD + DC = AD + DB = AB = 8 cm şi P = 14 cm. §8) ipotenuză – unghi ascuţit.

Înălţimea unui triunghi. Aria triunghiului : * §1) L.U.L. : (AD) ≡ (DE) (din ipoteză), ∢ADC ≡ ∢EDC (au 90°), DC latura comună. §2) 32 cm^2. §3) 8 cm. §4) 6 cm^2. ** §5) a) 48 cm^2; b) 50 cm^2. §6) 20 cm.

Capitolul IX : Paralelism.

Drepte paralele : * §1) a) 70° şi 110°; b) 36° şi 144°; c) 108° şi 72°; d) 51° şi 129°. ** §2) a) a || b; b) a || b; c) Nu; d) a || b; e) Nu; f) a || b. §3) ∢1 = 30°; ∢4 = 150°; ∢1 ≡ ∢7 ≡ ∢2 ≡ ∢5 si ∢4 ≡ ∢6 ≡ ∢8 ≡ ∢3. §4) ∢5 = 72°; ∢8 = 102°; §5) a) cum 132° + 48° = 180° ⇒ a || b ⇒ unghiurile căutate au 70; b) 89°30' + 90°30' = 180° ⇒ a || b ⇒ 27°45'. §6) (∢EAB) = 50°, m(∢ABF) = 50°, m(∢ABC) = 25°. §7) (∢CAB) = 38° ⇒ m(∢CAD) = 76° ⇒ ∢CAD ≡ ∢ADF ⇒ a || b. §16) m(∢EAB) = 1030' ⇒ m(∢DAB) = 21; m(∢CBF) = 159 ⇒ m(∢CBA) = 21° ⇒ ∢DAB ≡ ∢CBA ⇒ a || b. §17) dacă bisectoarele sunt paralele ⇒ jumătăţile de unghiuri sunt congruente, ca unghiuri alterne interne formate de drepte paralele cu o secantă ⇒ unghiurile sunt congruente ⇒ dreptele sunt paralele. §18) U.L.U.. §19) U.L.U.

Capitolul X : Proprietăţile triunghiului

Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi : * §1) a) m(∢C) = 55°; b) m(∢A) = 44°17'; c) m(∢L) = 120°, △ isoscel; d) m(∢P) = 74°25'; e) m(∢S) = 69°10'39"; f) 57°, △ isoscel; g) 60°, △ echilateral; h) m(∢G) = 90°, triunghi dreptunghic. §2) a) 90° şi 60°; b) 90° si 54°31'; c) 90°, 45°, 45°. §3) m(∢C) = 25°. ** §4) m(∢C) = 32°; m(∢B) = 64°. §5) m(∢A) =40° §6) a) 45°, 45°, 90°; b) 28°; 56°; 96°; c) 24°; 72°; 84°. §7) echilaterale. §8) 30° şi 60°. §9) 15° şi 45°. 10) 56° şi 84°. §11) 50°; 60°; 70°. §12) 40°, 60°, 80°. §13) 75°; 45°; 60°. §14) m(∢C) = 82°, m(∢ACD) = 41°, m(∢ADC) = 109°, m(∢DBC) = 71°. § 15) m(∢B) = 50°, m(∢C) = 90°, m(∢ADB) = 115° §16) m(∢A) = 40°, m(∢C) = 90°, m(∢ABC) = 70°. §17) m(∢A) = 68°, m(∢BAD) = 34°, m(∢BDA) = 118°. §18) m(∢A) = 50°, m(∢BAD) = 30°, m(∢CAD) = 20°, m(∢BDA) = 90°. §19) m(∢ABD) = 37°, m(∢C) = 67°, m(∢ADB) = 90°. §23) m(∢AOB) = 105°, m(∢AOD) = 75°, m(∢BAC) = 30°, m(∢CBD) = 27°, m(∢AEB) = 78°. §24) m(∢C) = 62°, m(∢CAD) = 28°, m(∢BAD) = 62°, m(∢AED) = 90°, m(∢ADE) = 28°, m(∢BED) = 90°, m(∢BDE) = 62°. §25) m(∢ANB) = 10°, m(∢NBA) = 180° − (40° +20°) = 120°, m(∢NAB) = 50°. §26) DE bisectoarea unghiului ∢ADC, E ∈ AC în △ADC ⇒ m(∢DAC) = 20° ⇒ m(∢BAD) = 45° şi m(∢ ADE) = 45° ⇒ ∢BAD ≡ ∢ADE (unghiuri alterne interne) ⇒ AB || DE. §27) m(∢C) = 180° − (20° + 35° + 90°) = 35° ⇒ △CAD isoscel. §28) în △CDA ⇒ m(∢CDA) = 90° ⇒ CD⊥AB, în △ABC, m(∢BCA) = 80° = m(∢BED) ⇒ DE || AC. §29) m(∢ABC) = 60° ⇒ m(∢ABE) = m(∢CBE) = 30°, m(∢ABE) = m(∢DEB) = 30° ⇒ DE || AB. §30) a) U.L.U.; b) , c) două drepte perpendiculare pe a treia dreaptă sunt paralele între ele.

Mediana unui triunghi. Simetria faţă de o axă : ** §1) KL = 20, ML = 22 şi MK = 22. §2) perimetrul △DEF = 34 cm sau P = 32 cm. §3) P = 48 cm. §7) a) L.U.L.; b) de la punctul a) ⇒ (AB) ≡ (EC) şi cum (AB) ≡ (AC) ⇒ (AC) ≡ (EC) ⇒ △ECA isoscel. §8) a) ∢ABM ≡ ∢DCM, L.U.L. ⇒ ∢ABM ≡ ∢DCM (alterne interne) ⇒ AB || CD; b) la fel pentru △AMC ≡ △DMB. §9) a) U.L.U.; b) L.U.L.; c) din b) ⇒ ∢MCD ≡ ∢MAB ⇒ DC⊥AB. §10) AD ∩ BC = {M} şi △ AMC ≡ △DMB şi △ABM ≡ △DCM. §11) m(∢A) = 60° ⇒ m(∢CAE) = 30°, ED ∩ AC = {P}, cum △APE ≡ △APD ⇒ △AED isoscel cu m(∢EAD) = 60° ⇒ △AED ⇒ echilateral . §12) echilateral. §13) a) L.U.L. : (AM) (din ipoteză), (BM) ≡ (MC) (pentru că AM mediană), ∢AMC ≡ ∢BMC (unghiuri opuse la vârf); b) L.U.L.; c) L.L.L.: (AC) ≡ (DB) (din demonstraţie), (AB) ≡ (DC) (din demonstraţie) şi BC latura comună.

Triunghiul isoscel : * §1) AC = 7 cm ⇒ Δ isoscel, cum (AC) ≡ (BC) ⇒ ∢A ≡ ∢B. §2) AC = 5,5 cm ⇒ (AC)≡(AB) ⇒ ∢B ≡ ∢C. ** §3) a) 6 cm + 8 cm + 8 cm = 22 cm; b) 20 cm; c) 38 cm. §4) a) ΔABC isoscel (AB) ≡ (AC); b) nu e isoscel; c) nu e isoscel; d) ΔABC isoscel (AC) ≡ (BC); e) ΔABC isoscel, (AB) ≡ (AC); f) ΔABC isoscel (BC) ≡ BA). §5) a) AB = 22 cm − (7 cm + 8 cm) = 7 cm ⇒ (AB) ≡ (AC) ⇒ m(∢B) = 45°; b) AC = 9 cm ⇒ (AC) ≡ (BC) ⇒ m(∢B) = 28°. §6) a) ∢BAD ≡ ∢CAD ⇒ AD bisectoare din vârf ⇒ mediana şi înălţime CD = 4 cm, m(∢BDA) = 90°; b) (BD) ≡ (DC) ⇒ AD mediana din vârf ⇒ bisectoare şi înălţime ⇒ m(∢BAD) = 25°, m(∢BDA) = 90°; c) AD⊥BC ⇒ AD înălţime din vârf ⇒ bisectoare şi mediană ⇒ BD = 4 cm, m(∢BAD) = 25°, AC = 10 cm, $P_{\Delta ABC}$ = 28 cm. §7) a) ΔABC isoscel ⇒ ∢ABC ≡ ∢ACB (unghiuri de la bază) ⇒ ∢EBA ≡ ∢FCA (diferenţe de unghiuri congruente) ⇒ ΔEBA ≡ ΔFCA, L.U.L.; b) cum (AE) ≡ (AF) (din a) ⇒ ΔAEF isoscel. §9) a) ∢EBA ≡ ∢FCA (diferenţe de unghiuri congruente) ⇒ ΔEBA ≡ ΔFCA, L.U.L. ⇒ (AE) ≡ (AF) ⇒ ΔAEF isoscel. §10) a) ∢DBC ≡ ∢DCB (jumatăţi de unghiuri congruente) ⇒ ΔDBC isoscel ⇒ (BD) ≡ (DC) c) L.U.L. ⇒ ∢BAD ≡ ∢CAD ⇒ AD bisectoare. §11) a) U.L.U.; b) rezultă din a); c) din a) rezultă (AD) ≡ (AE) ⇒ ΔADE isoscel. §12) ΔABD ≡ ΔACE, L.U.L. ⇒ (AD) ≡ (AE) ⇒ ΔADE isoscel. §13) cum ∢EBA ≡ ∢FCA (suplemente de unghiuri congruente) ⇒ ΔABE ≡ ΔACF, U.L.U. ⇒ (AE) ≡ (AF) ⇒ ΔAEF isoscel. §14) DA mediană din vârf ⇒ bisectoare şi înălţime ⇒ m(∢BDE) = 90° ⇒ ∢BDE ≡ ∢CDE, L.U.L ⇒ ∢EBD ≡ ∢ECD; b) ∢ABE ≡ ∢ACE (diferenţe de unghiuri congruente). §15) (AC) ≡ (CM). §16) ΔENP ≡ ΔEPN, L.U.L. §17) ΔMCB ≡ ΔMBC, L.U.L. §18) fie DC şi BE bisectoarele ⇒ ΔDCB ≡ ΔEBC, L.U.L. §19) ΔABM ≡ ΔACM, L.U.L., ΔBME ≡ ΔCME, L.U.L. §20) a) 10 cm^2; b) 8 cm. §21) 20 cm. §22) ∢CBF ≡ ∢AFB ⇒ a ∥ b şi ∢CBF ≡ ∢ABF ⇒ bisectoare ⇒ ∢ABF ≡ ∢AFB ⇒ ΔABF isoscel. §23) de la problema anterioară ⇒ ΔABC isoscel, AD bisectoarea din vârf ⇒ AD în înălţime şi mediană ⇒ AD⊥BC şi (BD) ≡ (DC). §24) a) şi b) ca la 21); c) m(∢CAD) + m(∢BAD) = m(∢EAD)/2 ; m(∢FAD)/2 = [m(∢EAD) + m(∢FAD)]/ 2 = 180°/2 = 90°; d) (CD) ≡ (DA) (ΔADC isoscel), (AD) ≡ (DB) (ΔDAB isoscel), (CD) ≡ (DB) ⇒ AD mediană. §25) EF ∥ NP ⇒ ∢MEF ≡ ∢NMP şi ∢MEF ≡ ∢MPN (unghiuri corespondente) şi cum ∢MNP ≡ ∢MPN ⇒ ∢MEF ≡ ∢MFE. §26) se arată că ∢DAE ≡ ∢DEA ⇒ ΔDAE isoscel ⇒ BD înălţime ⇒ BD⊥AE dar AE ∥ DC ⇒ BD⊥DC, DC⊥EF ⇒ BD⊥EF. §27) ∢GCD ≡ ∢BCD (CD bisectoare), ∢GCD ≡ ∢CGE (alterne interne), CD ∥ GE), ∢BCD ≡ ∢GEC (corespondente), CD ∥ GE) ⇒ ∢GEC ≡ ∢CGE. §28) ∢ABC ≡ ∢ACB şi ∢ABC ≡ ∢OAC ⇒ ∢OBC ≡ ∢ACB ⇒ AC ∥ BO. §29) a) MC = BC/2 şi NC = CE/2 ⇒ MN = BE/2, AM⊥BE, DN⊥BE ⇒ AM ∥ DN şi cum ∢ABC ≡ ∢ACB ≡ ∢DCE ≡ ∢DEC ⇒ AB ∥ DE ⇒ m(∢NDE) =20°. §30) a) 51° şi 51°; b) 35° şi 110°; c) 50°30' şi 79°. §31) dacă unghiul ∢D este unghiul de vârf al triunghiului isoscel ⇒ m(∢B) = 66° dacă ∢D este unul din unghiurile de la baza triunghiului ⇒ m(∢B) = 48°. §32) 70°, 50°, 55°. §33) a) 68°; b) 130°. §34) a) ΔBEC este isoscel pentru că ∢C ≡ ∢BEC, m(∢C) = 72°; b) ΔBEA este isoscel, ∢A ≡ ∢EBA, m(∢A) = 36°; c) ΔAEF este isoscel, ∢EAF ≡ ∢EFA, m(∢EAF) = 54°. §35) 50°. §36) (AB) ≡ (AD) ⇒ ΔABD isoscel cu m(∢B) = 60° ⇒ ΔABD echilateral ⇒ (AD) ≡ (BD) şi m(∢ADB) = 60° ⇒ m(∢ADC) = 120° şi m(∢DAC) = 60°, m(∢ACD) = 30°. §37) ∢B ≡ ∢C, m(∢B) = 80°, m(∢MNB) = 80° ⇒ m(∢BNP) = 40° ⇒ m(∢CNO) = 40°, m(∢NCO) = 100° ⇒ m(∢O) = 40°. §38) în ΔAPE ⇒ m(∢E) = 70°; în ΔABC ⇒ ∢C ≡ ∢ABC, m(∢C) = 80° ⇒ m(∢EBD) = 100° ⇒ în ΔBED, m(∢BDE) = 10°. §39) în ΔABC ⇒ ∢B ≡ ∢C, m(∢B) = 70° ⇒ m(∢ACE) = m(∢BCE) = 35°, în ΔBDC ⇒ m(∢BDC) = 20° în ΔBFC = 125°. §40) M mijlocul lui AB, bisectoarea unghiului ∢A intersectează mediatoarea lui AB în O ⇒ în ΔAMO dreptunghic ⇒ m(∢MAO) = 40°, m(∢BAC) = 80° ⇒ ∢B ≡ ∢C, m(∢B) = 50°. §41) m(∢BAC) = 80° ⇒ m(∢ABD) = 70°, BA ∥ DE ⇒ m(∢DEC) = m(∢BAC) = 80°, AF ∩ DE = {P}, DE ∥ AB ⇒ m(∢EDC) = m(∢ABD) = 70°, ∢EDC ≡ ∢FDP (unghiuri opuse la vârf) ⇒ m(∢FDP) = 70°, în ΔFDP dreptunghic ⇒ m(∢P) = 20°. §42) m(∢DBE) = m(∢DCE) = 30° ⇒ ΔBDC isoscel ⇒ DE bisectoarea este şi înălţime. §43) ipotenuză – catetă. §44) ipotenuză – unghi ascuţit.

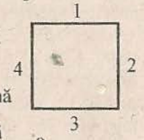
Triunghiul echilateral : * §1) 24 cm. §2) 33 cm. §3) ΔOBC echilateral (OB) ≡ (OC) ≡ (BC). ** §4) M mijloc ⇒ MF mediană ⇒ MF înălţime şi bisectoare. §5) a) ΔAEC ≡ ΔADB, L.U.L., (AE) ≡ (AC) ≡ (AB)≡ (AD), ∢EAB + ∢BAC = ∢DAC + ∢BAC pentru că ∢EAB ≡ ∢DAC; b) la fel. §6) ΔAED ≡ ΔCDF ≡ ΔBFE, L.U.L. ⇒ (ED) ≡ (DF) ≡ (EF). §7) ΔAA'C ≡ ΔCC'B ≡ ΔBB'A, L.U.L. ⇒ (CA') ≡ (BC') ≡ (AB') şi ∢ACA' ≡ ∢CBC' ≡ ∢BAB' ⇒ ΔB'AA' ≡ ΔA'CC' ≡ ΔC'BB', L.U.L. ⇒ (A'B') ≡ (A'C') ≡ (C'B'). §8) ΔAA'C ≡ ΔCC'B ≡ ΔBB'A, U.L.U. ⇒ (AA') ≡ (CC') ≡ (BB') si (A'C) ≡ (C'B) ≡ (B'A) ⇒ ΔB'AA' ≡ ΔA'CC' ≡ ΔC'BB', L.U.L. ⇒ (B'A') ≡ (A'C') ≡ (C'B'). §9) BM bisectoare ⇒ mediană ⇒ MD = CD/2 şi cum PD = CD/2, (BD) ≡ (CD) ⇒ (PD) ≡ (MD). §10) ΔOCN ≡ ΔOCM, L.U.L. ⇒ (ON) ≡ (OM) şi ΔOBP ≡ ΔOBM, L.U.L. ⇒ (OP) ≡ (OM) ⇒ (OM) ≡ (ON) ≡ (OP). §11) ΔAPN ≡ ΔCNM ≡ ΔBMP, L.U.L. ⇒ (PN) ≡ (MN) ≡ (MP). §12) DM şi EC înălţimi ⇒ mediane şi bisectoare ⇒ ΔODE isoscel cu (OE) ≡ (OD) ⇒ ΔODF ≡ ΔOEF, L.U.L. ⇒ ∢OFD ≡ ∢OFE. §13) a) AB ∩ DC = {P}, ΔPAC ≡ ΔPDB ⇒ AC ∥ BD; b) BM bisectoare în triunghi echilateral ⇒ BM înălţime ⇒ BM⊥AC, AC ∥ BD ⇒ ΔBOD dreptunghic. §14) AD bisectoare în triunghi echilateral ⇒ AD mediană ⇒ (BD) ≡ (DC), DE ∥ AB ⇒ ∢CDE ≡ ∢CBA şi ∢CED ≡ ∢CAB corespondente cum ∢CAB ≡ ∢CBA ⇒ ∢CDE ≡ ∢CED ⇒ (CD) ≡ (EC), dar CD = BC/2 ⇒ EC = AC/2 ⇒ (EC) ≡ (AE) ⇒ E mijloc. §15) în ΔBAD ⇒ m(∢B) = 30° ⇒ m(∢D) = 60°, cum m(∢BAE) = 30° ⇒ m(∢EAD) = 60° ⇒ ΔEAD echilateral. §16) BD⊥AC, BD ∩ AC = {M}, ΔAMD ≡ ΔAMB ⇒ ΔABD isoscel cu m(∢BAD) = 60° ⇒ ΔABD echilateral. §17) ΔACB ≡ ΔADB, m(∢CBD) = 60°. §18) intersecţia dintre AB şi bisectoarea unghiului XOY este E, ΔAOE ≡ ΔBOE, L.U.L. ⇒ ∢AOE ≡ ∢BOE şi cum OE bisectoare lui ∢XOY ⇒ B ∈ OY ⇒ ΔAOB isoscel cu m(∢O) = 60°. §19) BD ∩ AC = {M}, ΔAMD ≡ ΔAMB, {M} = OX ∩ EB, ΔOBN ≡ ΔOCN, {N} = OY ∩ BC. Deci ΔOEC isoscel cu m(∢EAC) = 60° ⇒ ΔDEC echilateral. §21) a) DE ∩ AC = {M} ⇒ ΔAME ≡ ΔADE isoscel cu m(DAE) = 60° ⇒ ΔADE echilateral; b) AB ∩ FC = {R} ⇒ ΔARC ≡ ΔARF ⇒ (AF) ≡ (AC) ⇒ ΔAFB isoscel ((AF) ≡ (AB)) cu m(∢FAB) = 60° ⇒ ΔAFB echilateral. §22) BP şi AM mediane ⇒ (MC) ≡ (PC) ⇒ ipotenuză – catetă. §23) m(∢RAD) = m(∢PAD) − m(∢BAC/2) (pentru că AP bisectoare) ⇒ m(∢RAD) = 60° ⇒ ΔBAR ≡ ΔDAR, catetă – unghi ascuţit ⇒ (BR) ≡ (DR). §24) a) ca la 23) ⇒ (BR) ≡ (RE) şi (DP) ≡ (PC), cum (BR) ≡ (PC) ⇒ (DC) ≡ (BE); b) se arată că ΔARE ≡ ΔARD, ΔAPC ≡ ΔAPD ⇒ ∢DAP ≡ ∢PAR ≡ ∢RAE, m(∢DAP) = 60° ⇒ m(∢DAE) = 180° ⇒ D, A, E coliniare. §25) 120° şi 60°. §26) bisectoarea unghiului ∢A va fi şi înălţime în ΔABC echilateral şi în ΔAMN isoscel ⇒ AR⊥MN şi AR⊥BC ⇒ MN⊥BC.

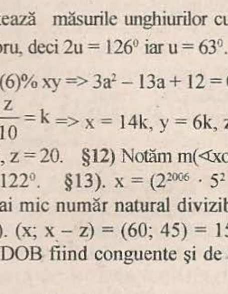
Proprietăţile triunghiului dreptunghic : ** §1) ΔOCD dreptunghic cu m(∢O) = 30° ⇒ cateta

CD = OC/2 = 3 cm. §2) ΔOCD dreptunghic cu $m(\sphericalangle O) = 60^0 \Rightarrow m(\sphericalangle D) = 30^0 \Rightarrow OC = OD/2 \Rightarrow OD = 16$ cm, ΔOCD dreptunghic cu $m(\sphericalangle O) = 60^0 \Rightarrow m(\sphericalangle OCE) = 30^0 \Rightarrow OE = OC/2 = 4$ cm. §3) 2 cm. §4) cum $(BC) \equiv (AC)$ si $(BC) \equiv (CD) \Rightarrow (AC) \equiv (CD) \Rightarrow \Delta ABC$ isoscel cu $m(\sphericalangle ACD) = 120^0 \Rightarrow m(\sphericalangle CAD) = 30^0 \Rightarrow m(\sphericalangle BAD) = 90^0$. §5) cum $\Delta ABD \equiv \Delta AED \Rightarrow \Delta ABE$ isoscel cu $m(\sphericalangle B) = 60^0 \Rightarrow \Delta ABE$ echilateral cum $m(\sphericalangle C) = 30^0$ şi $m(\sphericalangle CAE) = 90^0 - 60^0 = 30^0$, ΔAEC isoscel $\Rightarrow (AE) \equiv (EC) \equiv (EB) \Rightarrow$ AE mediană.

Capitolul XI : Probleme pentru pregătirea concursurilor şcolare

§1) $\frac{a+b}{\frac{1}{6}} = \frac{a+c}{\frac{1}{4}} = \frac{b+c}{\frac{1}{3}} = \frac{2(a+b+c)}{\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}} = k \Rightarrow a+b+c = \frac{3k}{8}$; din $a+b+c = \frac{3k}{8}$ şi $a+b = \frac{k}{6} \Rightarrow c = \frac{3k}{8} - \frac{k}{6} = \frac{5k}{24} \Rightarrow$ $b = \frac{k}{8}$; $a = \frac{k}{24}$; din $\frac{23 \cdot \frac{k}{24} \cdot \frac{k}{8} \cdot \frac{5k}{24}}{\frac{k}{24} \cdot \frac{k}{8} + \frac{k}{24} \cdot \frac{5k}{24} + \frac{k}{8} \cdot \frac{5k}{24}} = 15 \Rightarrow a = \frac{24}{24} = 1$; $b = \frac{24}{8} = 3$; $c = \frac{5 \cdot 24}{24} = 5$. §2) a) $k \Rightarrow m(\sphericalangle C) = 45^0$ şi $\frac{m(\sphericalangle A)}{2} = \frac{m(\sphericalangle B)}{4} = k \Rightarrow m(\sphericalangle A) = 2k$, $m(\sphericalangle B) = 4k$. Cazuri : dacă $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle C) = 2k \Rightarrow k = \frac{45^0}{2}$, deci $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle B) = 90^0$. Dacă $m(\sphericalangle B) = m(\sphericalangle C) = 4k$, deci $m(\sphericalangle B) = m(\sphericalangle C) = 72^0$ şi $m(\sphericalangle A) = 36^0$. b) 3AB = 5BC = $AB = \frac{k}{3}$, $BC = \frac{k}{5}$.
Cazuri : dacă AB = AC = $\frac{k}{3}$, atunci $\frac{k}{3} + \frac{k}{3} + \frac{k}{5} = 143 \Rightarrow k = 165$. Deci AB = AC = $\frac{165}{3} = 55$ cm şi $BC = \frac{165}{5} = 33$ cm. Dacă BC = AC = $\frac{k}{5}$, atunci $\frac{k}{5} + \frac{k}{5} + \frac{k}{3} = 143 \Rightarrow k = 195$. DeciBC = AC = $\frac{195}{5} = 39$ cm şi $AB = \frac{195}{3} = 65$. §3) $a = \frac{20}{100}b = \frac{1}{5}b$; $b = \frac{20}{100}c = \frac{1}{5}c$; $c = \frac{1}{5}d$; $\Rightarrow$ Notăm d = x, $c = \frac{1}{5}x$; $b = \frac{1}{25}x$; $a = \frac{1}{125}x$; $\sqrt{\frac{x^4}{625 \cdot 25}} = x$; $\frac{x^2}{125} = x \Rightarrow x = 125$; d = 125, b = 25, c = 5, a = 1. §4) a) 200 segmente; b) 100a. §5) Fiind o sumă de numere pozitive, egalitatea este adevărată numai în cazul în care $x - y + 5 = 0$ şi $y - 3 = 0$, adică y = 3 şi x = –2. §6) BC = 20cm. P_{ABCD} = AB + BC + CD + DA = 15 + 20 + 90 =135 cm; AD + CD = $\frac{9}{4}CD$; atunci CD = $90 \cdot \frac{4}{9} = 40$ cm iar AD = 50 cm. §7) Dacă numerotezi locurile ca în figura alăturată şi alegi o ordine de aşezare cum ar fi : mama, tata şi apoi copiii, găseşte 6 situaţii posibile, adică (1, 2, 3, 4); (1, 2,4, 3); (1,4, 2, 3); (1, 4, 3, 2); (1, 3, 2, 4); (1, 3, 4,2). Aşadar sunt în total 24 de situaţii posibile. $P(E_1) = \frac{2}{3}$, $P(E_2) = P(E_3) = \frac{1}{3}$. §8) Notează măsurile unghiurilor cu u şi v. Atunci se obţin relaţiile : $u - v = 36^0$ şi $u + v = 90^0$. Adună cele două relaţii membru cu membru, deci $2u = 126^0$ iar $u = 63^0$. Aşadar suplementele au măsurile de 117^0 şi respectiv 153^0. §9) 1. §10) Din $\frac{x}{2} = \frac{y}{a} = k$ şi $x^2 + y^2 = 216,(6)\%\ xy \Rightarrow 3a^2 - 13a + 12 = 0$. Cum $a \in N$, prim şi se observă că $3 \mid 3a^2$ şi $3 \mid 12 \Rightarrow 3 \mid 13a \Rightarrow a = 3$. §11) Din $\frac{x}{14} = \frac{y}{6} = \frac{z}{10} = k \Rightarrow x = 14k, y = 6k, z = 10k$ $\Rightarrow (x; y; z) = 2k \Rightarrow [x; y; z] = 2k \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 \Rightarrow 420 = 2k \cdot 7 \cdot 35 \Rightarrow k = 2 \Rightarrow x = 28, y = 12, z = 20$. §12) Notăm $m(\sphericalangle xoy) = 2x$ şi $m(\sphericalangle xoz) = 2y \Rightarrow 2x + 2y = 180^0$ şi $y - x = 32^0 \Rightarrow m(\sphericalangle xoy) = 58^0$ şi $m(\sphericalangle xoz) = 122^0$. §13). $x = (2^{2006} \cdot 5^2 \cdot 3^{27}) : 2^{2004} : 5 : 3^{26} = 2^2 \cdot 5 \cdot 3 = 60$; $y = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^2 + 1 = 21$; Deoarece a < b şi $\overline{ab}$ cel mai mic număr natural divizibil cu 5 $\Rightarrow \overline{ab} = 15$. Atunci :a).(x; y; z) = (60; 21; 15) = 3; [x; y; z] = [60; 21; 15] = 420; b). (x; x – z) = (60; 45) = 15; [x; y + z] = [60; 36] = 12; c). 25%; 5%. §14). a).În figura alăturată : ∢AOC, ∢COD şi ∢DOB fiind conguente şi de aceeaşi parte a dreptei AB, vor avea câte 60^0 fiecare. Din $[AO] \equiv [OC] \equiv [OD] \equiv [OB] \Rightarrow$ ΔAOC, ΔCOD, ΔDOB sunt isoscele cu câte un unghi de $60^0 \Rightarrow$ sunt echilaterale. $m(\sphericalangle ECD) = 60^0$ şi $m(\sphericalangle EDC) = 60^0$, deci ΔCED este echilateral de latură [CD] ca şi $\Delta COD \Rightarrow \Delta CED \equiv \Delta COD \Rightarrow [CO] \equiv [ED]$; b).Calculăm $m(\sphericalangle MEC) = 120^0$ şi $m(\sphericalangle NED) = 120^0$; calculăm $m(\sphericalangle TCA) = 30^0$, opus la vârf cu $\sphericalangle MCE \Rightarrow m(\sphericalangle MCE) = 30^0$. Se află $m(\sphericalangle PDB) = 30^0$, opus la vârf cu $\sphericalangle NDE \Rightarrow m(\sphericalangle NDE) = 30^0$. Din faptul că ΔCED echilateral $\Rightarrow [CE] \equiv [ED]$. Din $\sphericalangle MCE \equiv \sphericalangle NDE$, $[CE] \equiv [ED]$, $\sphericalangle MEC \equiv \sphericalangle NED \Rightarrow \Delta MEC \equiv \Delta NED$ (U.L.U.)





§15). x, y, z, t fiind unghiuri în jurul unui punct fac împreună 360^0; $x + y + z + t = 360^0$ (1); {2x; 4y; 3z; 5t} d.p. {4; 12; 6; m} $\Rightarrow \frac{2x}{4} = \frac{4y}{12} = \frac{3z}{6} = \frac{5t}{m} \Rightarrow$ $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2} = \frac{t}{\frac{m}{5}} = k$; $k \in Q_+^*$, deci $x = 2k$; $y = 3k$; $z = 2k$; $t = \frac{m}{5}k$. Din (1) $\Rightarrow 2k + 3k + 2k + \frac{m}{5}k = 360^0$; iar $x + z = y + t \Rightarrow 2k + 2k = 3k + \frac{m}{5}k \Rightarrow k = \frac{m}{5}k \mid : k \Rightarrow m = 5 \Rightarrow 2k + 3k + 2k + k = 360^0 \Rightarrow k = 45^0 \Rightarrow x = 2 \cdot 45^0 = 90^0$; $y = 3 \cdot 45^0 = 135^0$; $z = 2 \cdot 45^0 = 90^0$; $t = 45^0$. §16). Fie AB = BC = CD = x şi DK = KM = ML = y $\Rightarrow$ 3x + 3y = 72 cm | : 3 $\Rightarrow$ x + y = 24 cm^2. a). CK = CD + DK = x + y = 24 cm; BM = BC + CD + DK + KM = x + x + y + y = 2x + 2y = 2(x + y) = 2 · 24 cm = 48 cm. b). Dacă $C \in (AL)$ astfel încât AC = CL $\Rightarrow$ AC = 72 : 2 cm = 36 cm. Deci AB = 36 cm : 2 = 18 cm.